Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Wiederholungsaufgaben (2. Teil)

– Aufgaben zur Klausurvorbereitung –

Bemerkung: *Eine Auswahl ähnlicher Aufgabentypen wird den Inhalt der Prüfungsklausur bilden. Hinzu kommen noch kleine Fragen zu grundlegenden mathematischen Begriffen, Sätzen und Sachverhalten aus der Vorlesung. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Klausur wird insgesamt 120 Minuten dauern.*

5. a) Zeigen Sie mittels $\varepsilon - n_0-$ Abschätzung die Konvergenz der Zahlenfolge (a_n) mit $a_n := \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ gegen 1.

b) Beweisen Sie folgende Rechenregel für Zahlenfolgen: Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und (b_n) eine beschränkte Folge, so konvergiert $(a_n b_n)$ ebenfalls gegen 0.

c) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2)}{n}\ , \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n-5}\ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+5n^2+4}{(2n+1)^3}\ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+n}-1}{n}\ .$$

6. a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz oder Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(1+n)}} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n}-\sqrt{n})\ .$$

b) Zeigen Sie jeweils die Konvergenz der Reihe und bestimmen Sie deren Summe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6^k}+\frac{5}{3^{k+1}}\right) \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\ .$$

7. a) Zeigen Sie, dass die unendliche Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} z_i a^{h-i}$ mit $a, h \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ und $z_i \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$ stets absolut konvergiert. Welcher Zusammenhang besteht zwischen einer solchen Reihe und der Dezimalbruchentwicklung (bzw. der zugehörigen Intervallschachtelung) positiver reeller Zahlen?

b) Warum ist die Vereinbarung, dass bei einem unendlichen periodischen Dezimalbruch keine 9-Periode auftreten soll, sinnvoll? Welcher Forderung an die Konstuktion einer Dezimalbruchentwicklung entspricht diese Vereinbarung? Was ist diejenige reelle Zahl, welche durch den Dezimalbruch $123,048\overline{9}$ dargestellt werden würde?

8. a) Berechnen Sie jeweils die Cauchysche Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \ , \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n \ .$$

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die auftretenden Reihen?

b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien und Konvergenzkreise der Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\sqrt{n}} z^{3n+1} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(-3)^n} (z-1+4i)^n \ .$$

c) Leiten Sie für die Funktionen $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$, $z \in \mathbb{C}$ eine Darstellung in Werten der Exponentialfunktion exp her. Stelle die Funktionen $\sinh x, \cosh x$ für $x \in \mathbb{R}$ grafisch dar.