Vorlesung Mathematik für Physiker — Hans-Peter Gittel
Lineare Algebra 1 — Universität Leipzig
Wintersemester 2019/2020 — Mathematisches Institut

Wiederholungsaufgaben (1. Teil)

– Aufgaben zur Klausurvorbereitung –

Bemerkung: *Eine Auswahl ähnlicher Aufgabentypen wird den Inhalt der Prüfungsklausur bilden. Hinzu kommen noch kleine Fragen zu grundlegenden mathematischen Begriffen, Sätzen und Sachverhalten aus der Vorlesung. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Klausur wird insgesamt 120 Minuten dauern.*

1. a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$: $\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \leq \frac{n}{3}$.

b) Sei $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und $n \geq 2$. Dann wird mit

$$V_n(x_1,\ldots,x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

die *Vandermondesche Determinante* bezeichnet. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion nach n die Formel

$$V_n(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \ .$$

(*Hinweis*: Nach geeigneten elementaren Spaltenumformungen kann diese Determinante nach der ersten Zeile entwickelt werden, wodurch die Anwendung der Induktionsvoraussetzung möglich wird.)

c) Zeigen Sie, dass $G := \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ eine additive abelsche Gruppe bez. der üblichen Rechenoperation in $\mathbb{R}$ bildet.

d) Zeigen Sie, dass $K := \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ einen Körper bez. der üblichen Rechenoperationen in $\mathbb{R}$ bildet.

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge sowie deren Dimension für jedes der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 10 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & + & 12x_4 & = & 18 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & = & 10 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 16 \end{array}$$

3. Sei $\quad \mathbb{A}_n := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid A^T = -A\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{A}_n$ einen Unterraum des Vektorraums $\mathbb{K}^{n\times n}$ bildet.

b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{A}_n$ und geben Sie eine Basis an.

c) Zeigen Sie Det $A = 0$ für ungerades $n \in \mathbb{N}$. Gilt das auch für gerades n?

4. a) Sind die folgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{R}$ nach oben oder unten beschränkt? Bestimmen Sie gegebenenfalls obere, untere Schranken, $\sup M$ und $\inf M$.

$$M = \left\{ x \;\middle|\; x = \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n} \;,\; n \in \mathbb{N} \right\} \;, \qquad M = \{x \mid |x-1| - 1 \geq |4-x|\} \;.$$

b) Untersuchen Sie die nachfolgend gegebenen Zahlenfolgen (a_n) auf Monotonieverhalten, obere und untere Schranken und Grenzen sowie Grenzwerte:

$$a_n = \frac{2n^2 - n}{n^2 + 3} \;, \qquad a_n = \frac{4^n}{n!} \;.$$

c) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Menge $M := \left\{ \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$.