Ausführliche Definition des Vektorraumes

Ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ besteht aus einer Menge V von Elementen, die wir Vektoren nennen, und die folgenden Gesetzen genügt:

1. Verknüpfung von Vektoren:
Es gibt eine Verknüpfung $+$ auf V, die je zwei Vektoren v und w einen Vektor $v + w \in V$ zuordnet, so dass für alle $u, v, w \in V$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
Assoziativtät:

$$u + (v + w) = (u + v) + w.$$

Existenz des Nullvektors: Es gibt einen Vektor, den wir mit 0 bezeichnen, mit folgender Eigenschaft

$$v + 0 = v.$$

Existenz negativer Vektoren: Zu jedem Vektor v gibt es einen Vektor, den wir $-v$ nennen, mit

$$v + (-v) = 0.$$

Kommutativität:

$$u + v = v + u.$$

2. Verknüpfung von Skalaren und Vektoren:
Für jeden Vektor $v \in V$ und jedes Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Vektor $\lambda \cdot v \in V$ definiert (das Objekt $\lambda \cdot v$ (für das wir auch kurz λv schreiben) soll also ein Element von V sein). Diese Bildung des skalaren Vielfachen ist so, dass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und für alle Vektoren $v, w \in V$ die folgenden Eigenschaften gelten:
Assoziativität:

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v),$$

Vielfachbildung mit 1:

$$1 \cdot v = v,$$

Distributivität:

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v,$$

$$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w.$$