Hans-Peter Gittel

Lineare Algebra

(für Physiker)

Wintersemester 2015/2016

Universität Leipzig, Institut für Mathematik

Version vom 4. Januar 2016

Es wird keinerlei Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit der hier vorliegenden Mitschrift gegeben.

Diese Mitschrift wurde ursprünglich von Roy Mennicke mit Hilfe von LaTeX 2_ε im Wintersemester 2003/2004 gesetzt. Die jeweils aktuellste Version ist erhältlich unter:

`http://www.math.uni-leipzig.de/~gittel/ma1phys15.html`

Inhaltsübersicht

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Anton, H.: Lineare Algebra. Spektrum 2004

[2] Beutelspacher, A.: Lineare Algebra. Vieweg 1995

[3] Bosch, S.: Lineare Algebra. Springer 2008

[4] Fischer, H. und H. Kaul: Mathematik für Physiker 1. Teubner 2008

[5] Jänich, K.: Lineare Algebra. Springer 1993

[6] Kerner, H. und W. von Wahl: Mathematik für Physiker. Springer 2006

[7] Walter, R.: Einführung in die Lineare Algebra. Vieweg 1990

Kapitel 1

Einführung und Grundbegriffe

1.1 Einleitung

In der Schulgeometrie ging es oft um Lagebeziehungen von ebenen Figuren, Fragen nach bestimmten Schnittpunkten, Geraden und ähnliches wurden behandelt.

1.1.0.0.1 Beispiel: Schnittpunkt S zweier gegebener Geraden g_1, g_2. Es gibt zwei Möglichkeiten den Schnittpunkt zu bestimmen.

1) Lösung durch Konstruktion (Zeichnung). Die Geraden werden soweit verlängert, bis sie sich schneiden.

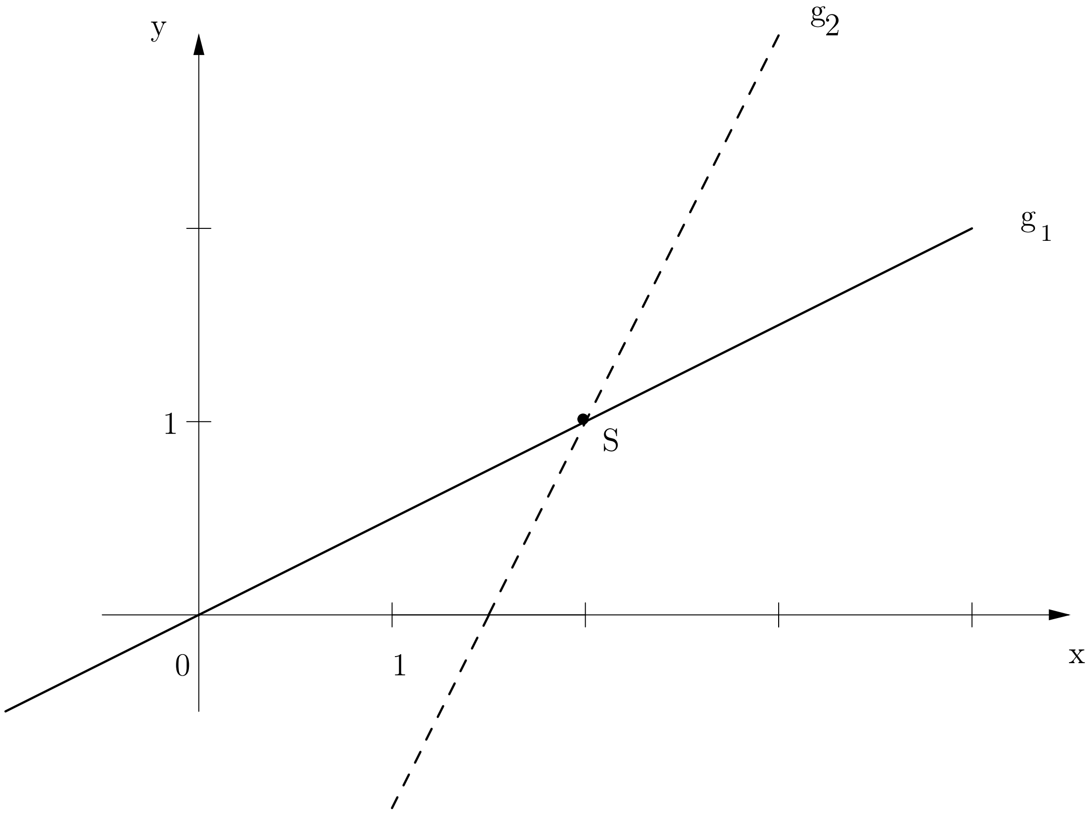
2) Einführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems:

$$\begin{aligned} &\text{Gerade } g_1 \text{ wird beschrieben durch die Gleichung:} \quad && y = \frac{1}{2}x \ , \\ &\text{Gerade } g_1 \text{ wird beschrieben durch die Gleichung:} \quad && y = 2x - 3 \ , \end{aligned}$$

$S = (x_S, y_S)$ bestimmt sich dann durch zwei Gleichungen für zwei Unbekannte. S liegt auf g_1 und g_2, somit gilt:

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{2}x_S & \qquad & y_S = 2x_S - 3 \\ \frac{1}{2}x_S &= 2x_S - 3 \ , & \quad \text{also} \quad & x_S = 2, y_S = 1 \end{aligned}$$

Damit haben wir das geometrische Problem in ein algebraisches überführt, welches mittels analytischen Hilfsmitteln gelöst wurde.



Umgekehrt: Kann man jedes algebraische Problem geometrisch deuten?

Bei der Behandlung vielfältiger Anwendungen stößt man bei der mathematischen Modellierung auf Gleichungen, welche „linear“ sind, d.h., die Unbekannten treten in den Gleichungen höchstens in der ersten Potenz auf.

1.1.0.0.2 Beispiel: Eine Getränkefabrik stellt durch Mischung eines Grundstoffes mit zwei Zusatzstoffen Z_1, Z_2 die Endprodukte P_1, P_2 und P_3 her. Durch Zumischung von 4l Z_1 und 3l Z_2 zum Grundstoff ergeben sich 100l P_1. Durch Zumischung von 2l Z_1 und 5l Z_2 erhält man 100l P_2. Durch Zumischung von 1l Z_1 und 2l Z_2 erhält man 100l P_3.

Folglich braucht man für $x_1$hl[I] P_1, $x_2$hl P_2 und $x_3$hl P_3:

$$\begin{aligned} b_1 &= 4x_1 + 2x_2 + x_3 \ \text{ l Zusatzstoff } Z_1 \\ b_2 &= 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \ \text{ l Zusatzstoff } Z_2 \end{aligned}$$

(System von 2 linearen Gleichungen)

[I] hl – Hektoliter

Verschiedene Fragestellungen:

1) Es werden 7hl P_1, 8hl P_2 und 13hl P_3 benötigt. Wieviel Liter Zusatzstoffe werden verwendet?

   Antwort: Durch Einsetzen in die beiden Gleichungen erhält man $b_1 = 57$ und $b_2 = 87$.

2) Es stehen 80l Z_1 und 90l Z_2 zur Verfügung. Wieviel Hektorliter der Endprodukte P_1, P_2 und P_3 kann man damit herstellen?

   Aus den beiden Gleichungen folgt ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 80 &= 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 90 &= 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \end{aligned} \tag{1.1.0.1}$$

   Gegenstand der linearen Algebra: Untersuchung solcher linearen Gleichungssysteme auf Lösbarkeit sowie Aussagen über Struktur der Lösungsmenge

   Was ist die Lösung des linearen Gleichungssystems (1.1.0.1)? 3 Werte für x_1, x_2 und x_3, so dass beide Gleichungen erfüllt sind. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} &x_1 = 14, x_2 = 0, x_3 = 24 \qquad \text{aber auch} \\ &x_1 = \frac{27}{2}, x_2 = -\frac{5}{2}, x_3 = 31^{\text{II}} \end{aligned}$$

   Die Lösung für das lineare Gleichungssystem (1.1.0.1) ist ein geeordnetes Tripel[III] (x_1, x_2, x_3) von reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, so dass die Gleichungen erfüllt sind.

   Da es auf die Reihenfolge und Position der Koeffizienten und Absolutglieder im linearen Gleichungssystem ankommt, kann man es durch folgendes Schema charakterisieren:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \end{pmatrix}$$

   (Koeffizientenmatrix) (Absolutglied(vektor))

   von (1.1.0.1)

Zur Untersuchung der Lösungsstruktur bei linearen Gleichungssystem benutzen wir Matrizen. Dabei spielen solche wichtigen Strukturen wie Gruppe, Körper und Vektorräume eine entscheidende Rolle.

[II] Diese Werte sind allerdings ökonomisch unsinnig.

[III] Eine Lösung ist beispielsweise $(14, 0, 24)$, jedoch $(0, 14, 24)$ nicht.

1.2 Mengentheoretische Grundlagen

1.2.1 Definition einer Menge (G. Cantor, 1845-1918)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.

Schreibweise: $x \in M$ (oder $M \ni x$), Gegenteil: $x \notin M$

1.2.2 Angabe von Mengen

1) durch Aufschreiben ihrer Elemente. Zum Beispiel:

$$M = \{2, 6, 9\} = \{9, 2, 6\} = \{6, 6, 2, 9, 2, 6\}$$

2) durch Beschreibung der charakterisierenden Eigenschaften ihrer Elemente. Zum Beispiel:

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7 \text{ und } x \text{ gerade}\} = \{2, 4, 6\}$$

1.2.3 Grundlegende Bezeichnungen

Symbol	*Bedeutung*	*Definition*
$x \in M$	x ist Element der Menge M	M enthält x
$x \notin M$	x ist kein Element von M	M enthält nicht x
$\emptyset$	leere Menge	Menge, die kein Element enthält
$\|M\|$	Mächtigkeit der Menge M	Anzahl der Elemente von M
$\wp(M)$	Potenzmenge von M	$\wp(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B[IV]	für alle $x \in A$ gilt $x \in B$
$A \subset B$	A ist echte Teilmenge von B	$A \subseteq B, A \neq B$
$A \cap B$	Durchschnitt von A und B	$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$
$A \cup B$	Vereinigung von A und B	$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$
$A \setminus B$	Differenz von A und B[V]	$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$
$A \times B$	kartesisches Produkt von A und B	$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

[IV] oder auch: B ist Obermenge von A

[V] oder auch: Komplement von B in A, zusätzlich $A \supseteq B$

Symbol	*Bedeutung*	*Definition*
$\mathbb{N}$	Menge aller natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen	$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	Menge aller ganzen Zahlen	$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	Menge aller rationalen Zahlen	$\mathbb{Q} := \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	Menge aller reellen Zahlen	
$\mathbb{R}_+$	Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen	$\mathbb{R}_+ := \{x \in R \mid x \geq 0\}$
$\mathbb{R}^n$	Menge aller n-Tupel reeller Zahlen	$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	Menge aller komplexen Zahlen	$\mathbb{C} := \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Dabei gilt:

1) $\emptyset \subseteq M, M \subseteq M$ für jede Menge M

2) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

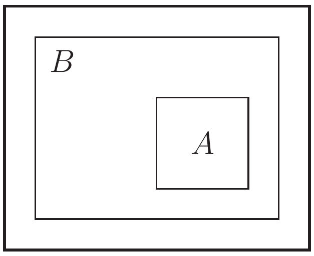
3) $M = \{a, b\}$, $\wp(M) = \{\emptyset, M, \{a\}, \{b\}\}$, $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ($\wp(\emptyset)$ ist eine einelementige Menge)

4) Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, so muss $A = B$.

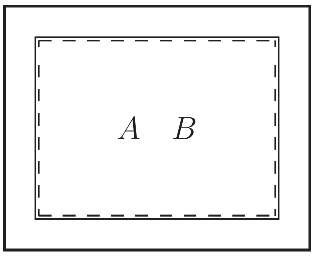
   Umgekehrt: Falls $A = B$, so ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

   Also: $A = B$ ist äquivalent mit ($A \subseteq B$ und $B \subseteq A$).

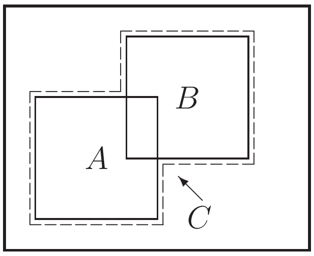
1.2.4 Venn-Diagramme



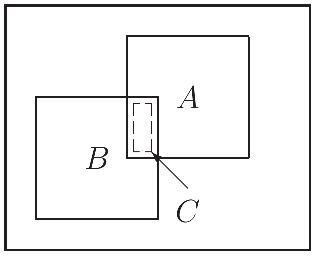
$A \subset B$



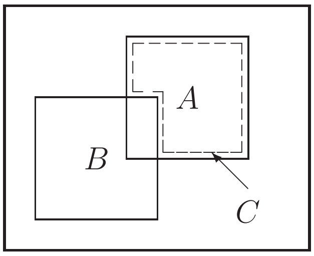
$A = B$



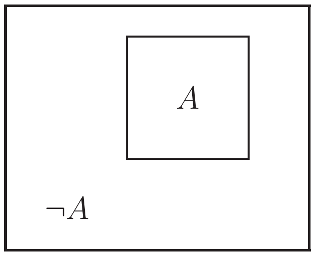
$A \cup B = C$



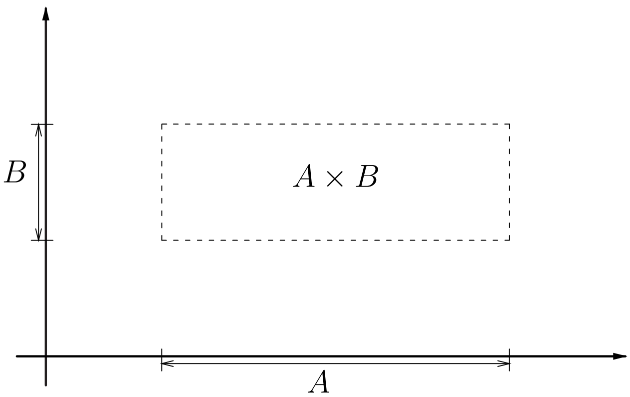
$A \cap B = C$



$A \setminus B = C$



1.2.4.0.1 Kartesisches Produkt veranschaulicht:



1.2.5 Rechenregeln für Mengenoperationen

Kommutativgesetze:

1) $A \cap B = B \cap A$

2) $A \cup B = B \cup A$

Assoziativgesetze:[VI]

3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Distributivgesetze:

5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Beweis:

a) Sei $x \in (A \cup B) \cap C$, d. h. $x \in (A \cup B)$ und $x \in C$ also ($x \in A$ oder $x \in B$) und $x \in C$.

Somit $x \in A \cap C$ oder $x \in B \cap C$ und folglich $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, also $A(\cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

b) Sei $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, d. h. $x \in A \cap C$ oder $x \in B \cap C$.

Somit gilt $x \in C$ und ($x \in A$ oder $x \in B$), d. h. $x \in C$ und $x \in A \cup B$. Folglich ist $x \in C \cap (A \cup B)$ und damit $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq C \cap (A \cup B) = (A \cup B) \cap C$.

6) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

1.2.6 Bemerkungen

1) Zwei Mengen heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$.

2) $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ für jedes } i \in \{1, \ldots, n\}\}$

3) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ für ein } i \in \{1, \ldots, n\}\}$

4) $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod\limits_{i=1}^{n} A_i = \{\underbrace{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}_{n\text{-Tupel}} \mid a_i \in A_i \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\}\}$

1.2.6.0.1 Spezialfall: Sind $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \underbrace{A \times A \times A \times \ldots \times A}_{n\text{-mal}} = A^n$$

[VI] Die Klammern können folglich weggelassen werden.

1.3 Abbildungen

1.3.1 Definition einer Abbildung

Seien X und Y Mengen. Eine *Abbildung* f von X nach Y (bzw. in Y) ist eine Vorschrift, welche jedem $x \in X$ genau ein $f(x) \in Y$ zuordnet.

Schreibweise:

$$\begin{array}{rl} & f : X \to Y \\ \text{elementweise:} \quad & f : x \mapsto f(x) \quad (x - \textit{Urbild},\ f(x) - \textit{Bild}) \end{array}$$

$X = D(f)$ heißt *Definitionsbereich* von f und
$W(f) := \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in X\}$ *Wertevorrat* oder *Bildbereich* von f.

1.3.1.1 Beispiele

1) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ definiert durch $f_1(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{Z}$

2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definiert durch $f_2(x) = |x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$

3) $f_3 : X \to X$ mit $X = \{1, 2, 3\}$ definiert durch $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 2$

4) Multiplikation reeller Zahlen als Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ (a, b) & \mapsto & (a \cdot b) \end{array}$$

Allgemein kann jede Operation als Abbildung aufgefasst werden.

5) identische Abbildung bzw. Identität id_X auf der Menge X, definiert durch

$$\mathrm{id}_X : \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

1.3.1.2 Bezeichnungen

Sei $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Dann heißt

$$\begin{array}{c} f(A) := \{f(x) | x \in A\} \quad \textit{Bildmenge} \text{ von } A, \\ (\text{z.B.: } f(X) = W(f),\ f_1(\{-1, 0, 1, 2\}) = \{1, 0, 4\}); \\ f^{-1}(B) := \{x | f(x) \in B\} \quad \textit{Urbildmenge} \text{ von } B, \\ (\text{z.B.: } f_2^{-1}([1, 2]) = [-2, -1] \cup [1, 2]). \end{array}$$

Hierbei bedeudet

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \quad (a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$

1.3.2 Definitionen

1) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *injektiv (eineindeutig)*, falls keine 2 Elemente von X dasselbe Bild in Y haben. (D.h., aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.)

2) f heißt *surjektiv* (bzw. *Abbildung auf* Y), falls zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $y = f(x)$.

3) f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

1.3.2.1 Beispiele

1) f_1 ist weder surjektiv noch injektiv, denn $3 \in \mathbb{N}_0$ ist kein Bild und $f_1(-1) = (-1)^2 = 1 = (1)^2 = f_1(1)$.

2) f_2 ist nicht injektiv, weil $f_2(-1,5) = |-1,5| = 1,5 = |1,5| = f_2(1,5)$. f_2 ist jedoch surjektiv, denn ihr Bildbereich ist gleich R_+.

3) f_3 ist bijektiv.

Zu einer bijektiven Abbildung $f : X \to Y$ kann man die Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ erklären, welche Wirkung von f rückgängig macht, indem man definiert:

Zu $y \in Y$ sei $f^{-1}(y) = x \in X$ mit $f(x) = y$. f^{-1} ist bijektive Abbildung und heißt *Umkehrabbildung* bzw. *inverse Abbildung* zu f.

1.3.2.2 Beispiel

$f_3^{-1} : X \to X$, $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 2$.

1.3.3 Hintereinanderausführung von Abbildungen

$f : X \to Y, g : Y \to Z$. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ die *Hintereinanderausführung* bzw. *Komposition* von g nach f.

1.3.3.1 Beispiele

Die Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) := \sqrt{|x|}$ ist die Komposition $h = g \circ f$ mit

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = |x|$ und
- $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $g(y) = \sqrt{y}$.

Dabei gilt: Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv, denn:

a) Setzen wir $h := g \circ f$, so folgt aus $h(x_1) = h(x_2)$ (mit $x_1, x_2 \in X$):

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)\ , \text{ weil } g \text{ injektiv ist.}$$

Aus Injektivität von f folgt dann $x_1 = x_2$. Somit ist h injektiv.

b) Zur Surjektivität von h: Für jedes $z \in Z$ (Z ist Bildmenge von g) gibt es $y \in Y$ mit $z = g(y)$ (Surjektivität von g). Weiterhin gibt es zu y ein $x \in X$ mit $y = f(x)$ (Surjektivität von f), also $z = g(f(x)) = h(x)$.

1.3.3.2 Bemerkung

Sei $f : X \to Y$ bijektiv, so ist $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$.

1.3.4 Bemerkung

Jeder mathematische Satz ist grundsätzlich eine „wenn-dann-Aussage", d.h. aus gewissen Aussagen (Voraussetzungen, Premissen) folgt eine andere Aussage (Behauptung, Konklusion). Dieser Schluss wird mittels der Regeln der Logik im Beweis dieser Behauptung erbracht.

formal:

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$

- $\mathcal{A}$ – Voraussetzung
- $\mathcal{B}$ – Behauptung
- $\Rightarrow$ – Implikation (Folgepfeil)

Andere Sprechweisen:

- „$\mathcal{A}$ ist hinreichend für $\mathcal{B}$"
- „$\mathcal{B}$ ist notwendig für $\mathcal{A}$"

Damit ist „$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$" gleichbedeutend mit „$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$", wobei „$\neg\mathcal{A}$" die Negation der Aussage $\mathcal{A}$ (Gegenteil von $\mathcal{A}$) bedeutet.

$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ bedeutet: „$\mathcal{A}$ ist notwendig und hinreichend für $\mathcal{B}$" oder „$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind äquivalent".

1.4 Natürliche Zahlen

Die Menge N kann man definieren mittels des *Axiomensystems* von PEANO(1889). Besonders wichtig ist das *Induktionsaxiom*:

Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften

1) $1 \in M$

2) Falls $n \in M$, so ist auch $n + 1 \in M$

Dann ist $M = \mathbb{N}$.

1.4.1 Anwendung

Beweismethode der *vollständigen Induktion*:
Sei eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ formuliert.

Zeige: *Induktionsanfang (IA)*: $\mathcal{A}(n_0)$ ist richtig.
Induktionsschluss (IS):
Aus der *Induktionsvoraussetzung (IV)*: „$\mathcal{A}(n)$ sei richtig.“
folgt die *Induktionsbehauptung (IB)*: „$\mathcal{A}(n+1)$ ist auch richtig.“

Falls (IA) und (IS) nachgewiesen sind, ist $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Beispiel

1) Behauptung:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}_{\sum_{k=1}^n k^3} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- *Induktionsanfang:*
  für $n = 1$ ist $1^3 = 1$ und $\frac{1^2(1+1)^2)}{4} = 1$
- *Induktionsvorraussetzung:*
  Sei $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- *Induktionsbehauptung:*
  Dann gilt auch $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$
- *Induktionsschluss:*

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = 1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3+(n+1)^3 \underset{\text{(IV)}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$
$$= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) = \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2$$

2) Mächtigkeit der Potenzmenge:
   Sei X eine *endliche Menge*, so gilt $|\wp(X)| = 2^{|X|}$.
   Beweis durch vollständige Induktion nach $n = |X| \in \mathbb{N}_0$:

- *Induktionsanfang:*

$$|X| = 0 \Rightarrow X = \emptyset, \quad \wp(X) = \{\emptyset\} \Rightarrow |\wp(X)| = 1 = 2^0$$

- *Induktionsvorraussetzung*
  Sei die Behauptung für alle Mengen M mit $|M| = n$ richtig.

- *Induktionsbehauptung:*
  Dann gilt Behauptung auch für alle X mit $|X| = n+1$.
- *Induktionsschluss*
  Für eine Menge X mit $n+1$ Elementen bilden wir zwei Sorten von Teilmengen $\mathcal{M}_1 := \{A \subseteq X \mid A \not\ni a\}$, $\mathcal{M}_2 := \{B \subseteq X \mid B \ni a\}$ für ein festes $a \in X$.

  $$\wp(X) = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2\ ,\ \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad |\wp(X)| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$$

  $\mathcal{M}_1 = \wp(X \setminus \{a\})$. Wegen $|X \setminus \{a\}| = n$ kann man (IV) benutzen mit $M = X \setminus \{a\}$, so dass $|\mathcal{M}_1| = 2^{|X \setminus \{a\}|} = 2^n$ ist.
  Für jedes $B \in \mathcal{M}_2$ ist $B \setminus \{a\}$ eindeutig zugeordnet einem Element von $\mathcal{M}_1$. Genauer: Es gibt eine Bijektion von $\mathcal{M}_2$ auf $\mathcal{M}_1 \Rightarrow |\mathcal{M}_2| = |\mathcal{M}_1| = 2^n$

  $$|\wp(X)| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

1.4.2 Permutationen

Auf $\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$ betrachten wir eine wichtige Klasse von Abbildungen, und zwar die bijektiven Abbildungen $\pi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$. π heißt *Permutation* von $1, 2, \ldots, n$ und die Menge aller solcher Abbildungen wird die Gruppe der Permutationen oder auch *symmetrische Gruppe* S_n genannt.
Schreibweise:

$$\pi : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

D.h. $\pi(1) = 3, \pi(4) = 7, \pi(6) = 6$

1.4.2.1 Behauptung

Es gibt genau $n!$ Permutationen von $1, \ldots, n$; d.h.: $|S_n| = n!$,
wobei $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod\limits_{k=1}^{n} k$ (sprich: n *Fakultät*)
Beweis: Eine Permutation π ist eindeutig festgelegt durch die Angabe $\pi(1), \ldots, \pi(n)$.

- Für die Wahl von $\pi(1)$ gibt es n Möglichkeiten.
- Für die Wahl von $\pi(2)$ gibt es $(n-1)$ Möglichkeiten, falls $\pi(1)$ festgelegt ist.
- Für die Wahl von $\pi(3)$ gibt es $(n-2)$ Möglichkeiten, falls $\pi(1), \pi(2)$ festgelegt sind.
- Für die Wahl von $\pi(n-1)$ gibt es 2 Möglichkeiten, falls $\pi(1), \ldots, \pi(n-2)$ festgelegt sind.
- Für die Wahl von $\pi(n)$ gibt es 1 Möglichkeit, falls $\pi(1), \ldots, \pi(n-1)$ festgelegt sind.

Insgesamt ergeben sich $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten.

1.4.2.2 Definition eines Fehlstands

Ein Paar $(i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ heißt *Fehlstand* von π, falls $i < j$ und $\pi(i) > \pi(j)$. ($\pi(i)$ und $\pi(j)$ stehen in *Inversion* zueinander.)

- Ist die Anzahl der Fehlstände gerade, so heißt π gerade und $\mathrm{sig}(\pi) = +1$.

- Ist die Anzahl der Fehlstände ungerade, so heißt π ungerade und $\mathrm{sig}(\pi) = -1$.

$\mathrm{sig}(\pi)$ heißt *Signum* oder *Vorzeichen* von π.

Eine Permutation, in der nur die Position von 2 Elementen vertauscht ist, d. h. es gibt $i, j \in \mathbb{N}_n, i < j$ mit $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ und $\tau(k) = k$ für $k \neq i, k \neq j$, heißt *Transposition*.

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & \dots & n \end{bmatrix}$$

1.4.2.3 Eigenschaften von τ

1) $\tau^{-1} = \tau$, m.a.W.[VII]: $\tau \cdot \tau = \tau^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_n}$

2) $\mathrm{sig}(\tau) = -1$[VIII], denn

   - $\tau(i) = j$ steht in Inversion zu $\underbrace{i+1}_{=\tau(i+1)}, \dots, \underbrace{j-1}_{=\tau(j-1)}$

   - $\tau(j) = i$ steht in Inversion zu $i+1, \dots, j-1$

   Außerdem steht $\tau(i)$ und $\tau(j)$ in Inversion. Die Anzahl der Inversionen von τ ist gleich $2(j-1-i)+1$, also ungerade.

3) $\mathrm{sig}(\tau \cdot \pi) = -\mathrm{sig}(\pi)$, denn die Anzahl der Inversionen π ändert sich um eine ungerade Anzahl nach Anwendung von τ.

1.5 Gruppen

Wir betrachten jetzt Mengen M zusammen mit darauf erklärten *Verknüpfungen (Operationen)*:

$$* : \; M \times M \to M$$

[VII] m.a.W. – mit anderen Worten
[VIII] Die Transposition ist damit ungerade.

1.5.1 Definition (Gruppenaxiome)

Sei $G \neq \emptyset$ und $*\colon G \times G \to G$ eine Verknüfung auf G, dann heißt $(G, *)$ eine *Gruppe*, falls

G1 $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a, b, c \in G$ gilt *(Assoziativität)*,

G2 es $e \in G$ gibt mit $a * e = e * a = a$ für alle $a \in G$ *(Existenz eines neutralen Elements)*,

G3 es zu jedem $a \in G$ ein $b \in G$ gibt mit $a * b = b * a = e$ *(Existenz eines inversen Elements)*.

$(G, *)$ heißt *kommutative* bzw. *abelsche* Gruppe, wenn zusätzlich gilt

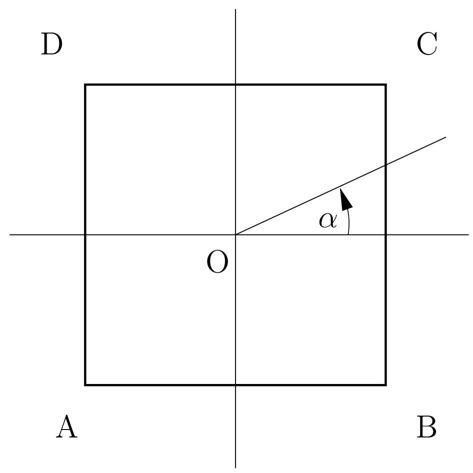
G4 $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$ *(Kommutativität)*.

1.5.2 Beispiele

1) $(\mathbb{Z}, +)$ bildet eine additive abelsche Gruppe mit dem neutralen Element $e = 0$ und dem inversen Element $-a$ zu a $(a + (-a) = 0)$. Ebenso $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}, +)$.

2) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ bildet eine multiplikative abelsche Gruppe mit dem neutralen Element $e = 1$ und dem inversen Element $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ zu z. Ebenso $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

3) Sei G die Menge der Drehungen der Ebene, welche ein gegebenes Quadrat Q in sich überführen. (Es sind nur Drehungen D_α um Winkel α um den Mittelpunkt O des Quadrats interessant.)



$$G = \left\{ D_0, D_{\pm\frac{\pi}{2}}, D_{\pm\pi}, D_{\pm\frac{3\pi}{2}}, D_{\pm\pi}, D_{\pm\frac{5\pi}{2}}, \ldots \right\}$$

$*$ ist hier die Hintereinanderausführung der Drehungen.

$(G, *)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element $e = D_0$ und dem inversen Element $D_{-\alpha}$ zu D_α.

Wegen $D_\alpha = D_{\alpha+2k\pi}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist G gegeben durch

$$G = \left\{ D_0, D_{\frac{\pi}{2}}, D_\pi, D_{\frac{3\pi}{2}} \right\}$$

1.5.3 Eindeutigkeit von neutralen und inversen Element in $(G, *)$

1) Es gibt *nur ein* Element aus G, das G2 erfüllt.
   Denn gelte für $e' \in G : a * e' = e' * a = a$ für alle $a \in G$. Mit $a = e$ folgt dann $e * e' = e' * e = e$. Andererseits ergibt sich aus G2 (mit $a = e'$): $e' * e = e * e' = e'$.

$$\Rightarrow e = e'$$

2) Es gibt *nur ein* inverses Element zu $a \in G$.
   Sei $a * b = b * a = e$ und $a * b' = b' * a = e$.

$$b' \underset{\text{G2}}{=} b' * e = b' * (a * b) \underset{\text{G1}}{=} (b' * a) * b = e * b \underset{\text{G2}}{=} b$$

1.5.4 Körper

Ein Körper besteht aus einer Menge K, auf der zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert sind, so dass

K1 $(K, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 ist

K2 $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist

K3 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$ gilt. *(Distributivität)*

1.5.4.0.1 Beispiele: $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ sind Körper, $\mathbb{Z}$ ist dagegen kein Körper, sondern nur ein *Ring*.

1.5.4.1 Bezeichung

- Bezüglich der Addition ist neutrales Element 0, und $(-a)$ das inverse Element zu a.
- Bezüglich der Multiplikation ist neutrales Element 1, und a^{-1} das inverse Element zu a.

Kapitel 2

Vektorräume und lineare Abbildungen

2.1 Vektorräume

2.1.1 Definition des Vektorraums

Ein *Vektorraum* über einem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) besteht aus einer Menge V von Elementen, die wir *Vektoren* nennen, und die folgenden Gesetzen genügt:

2.1.1.0.1 Verknüpfung von Vektoren: Es gibt eine Verknüpfung $+$ auf V, die je zwei Vektoren v und w einen Vektor $v + w \in V$ zuordnet, so dass für alle $u, v, w \in V$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- *Assoziativtät*

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

- *Existenz des Nullvektors*

  Es gibt einen Vektor, den wir mit 0 bezeichnen, mit folgender Eigenschaft

$$v + 0 = v$$

- *Existenz negativer Vektoren*

  Zu jedem Vektor v gibt es einen Vektor, den wir $-v$ nennen, mit

$$v + (-v) = 0$$

- *Kommutativität*

$$u + v = v + u$$

2.1.1.0.2 Verknüpfung von Skalaren und Vektoren: Für jeden Vektor $v \in V$ und jedes *Skalar* $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Vektor $\lambda \cdot v \in V$ definiert (das Objekt $\lambda \cdot v$ (für das wir auch kurz λv schreiben) soll also ein Element von V sein). Diese Bildung des skalaren Vielfachen ist so, dass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und für alle Vektoren $v, w \in V$ die folgenden Eigenschaften gelten:

- *Assoziativität*
$$(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$$
- *Vielfachbildung mit 1*
$$1 \cdot v = v$$
- *Distributivität*
$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$$
$$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$$

2.1.1.1 Bemerkungen

1) Kurz kann man einen Vektorraum V dadurch charakterisieren, dass $(V, +)$ eine additive abelsche Gruppe bildet und dass auf V zusätzlich eine Vielfachbildung mit Skalaren $\lambda \in \mathbb{K}$ erklärt ist, welche den obigen Gesetzen genügt.

2) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist V ein *reeller* Vektorraum, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist V ein *komplexer* Vektorraum.

3) Aus den Eigenschaften von Gruppen (siehe Abschnitt 1.5.3) folgt die Eindeutigkeit des *Nullelements* $0 \in V$ $(v + 0 = 0 + v = v$ für alle $v \in V)$, sowie die Eindeutigkeit des negativen Vektors $-v$ zu v $(v + (-v) = (-v) + v = 0)$.

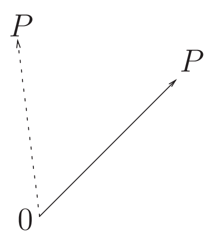
   Schreibweise: $v + (-w) =: v - w$

2.1.1.2 Folgerungen

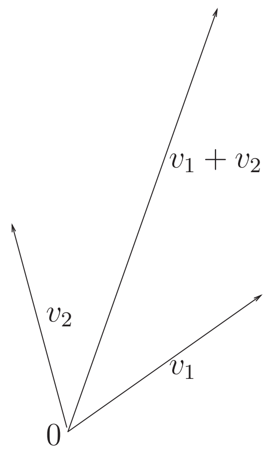
$$0 \cdot v = 0, \quad (-1) \cdot v = -v \quad \text{für alle } v \in V$$

2.1.1.3 Beispiele

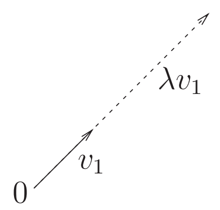
1) In der Ebene zeichnen wir einen Ursprung O aus und identifizieren jeden Punkt P mit der Verschiebung (Translation), welche O auf P abbildet. Vektoren sind die Translationen.



Addition von Vektoren ist die Hintereinanderausführung von Translationen.



Das λ-fache ($\lambda > 0$) ist die Verschiebung um das λ-fache (Streckung).



2) Prototyp eines reellen Vektorraums

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

mit

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

und

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

3) Menge $\mathcal{F}$ aller reellen Funktionen, d.h. aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Vektoren sind Funktionen)

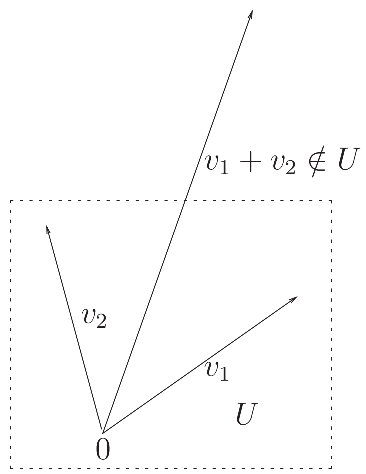
$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad \text{für } \lambda, x \in \mathbb{R}$$

2.1.2 Untervektorräume

Frage: *Sind Teilmengen $U \subseteq V$ wieder Vektorräume?*
Im Allgemeinen nicht, denn

$$+ : U \times U \to V \supseteq U$$

Zum Beispiel im $\mathbb{R}^2$:



Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, kurz *Unterraum* des Vektorraums V, falls U mit den in V gegebenen Verknüpfungen selbst wieder ein Vektorraum ist.

2.1.2.0.1 Folgerung: $\{0\}$ und V sind Unterräume von V.

Allgemein gilt das

2.1.2.1 Unterraumkriterium:

$U \subseteq V$ ist Unterraum von V genau dann, wenn

1) $U \neq \emptyset$

2) für $u_1, u_2 \in U$ ist $u_1 + u_2 \in U$

3) für $u \in U, \lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda u \in U$

Beweis:

($\Rightarrow$) Notwendigkeit der 3 Bedingungen klar nach Definition des Unterraums.

($\Leftarrow$) Hinlänglichkeit der 3 Bedingungen: Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze und $1 \cdot v = v$ gelten in V, also auch in $U \subseteq V$.

Nach den Bedingungen 2), 3) führen $+$ und $\cdot$ nicht aus U hinaus. Weiterhin ist $0 = 0 \cdot u \in U$ nach Bedingung 3) und $-u = (-1) \cdot u \in U$ nach Bedingung 3) für $u \in U$.

2.1.2.1.1 Bemerkung: Die Bedingung 1) kann ersetzt werden durch $0 \in U$.

2.1.2.2 Beispiele

1) $\mathbb{R}^3 \supseteq E = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^3$

2) $\mathbb{R}^2$: Sei $L \subseteq \mathbb{R}^2$ die Lösungsmenge der Gleichung $4x + 3y = 0$, d.h. $L = \{(x, y) \mid 4x + 3y = 0\}$. L ist Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

3) $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_0 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-1) = 0, f(16\pi) = 0\}$ ist Unterraum von $\mathcal{F}$.

   Kein Unterraum wäre beispielsweise $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-1) = 8, f(16\pi) = 0\}$.

4) Sind U_1, U_2 Unterräume von V, so ist $U_1 \cap U_2$ wieder Unterraum von V, denn $0 \in U_1, 0 \in U_2 \Rightarrow 0 \in U_1 \cap U_2$, so dass Bedingung 1) erfüllt ist. Ebenso sind die Bedingungen 2) und 3) des Unterraumkriteriums erfüllt.

5) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann ist

$$\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_m) = \{v \in V \mid v = \overbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m}^{\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i}, \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

   die Menge aller *Linearkombinationen* von $v_1, \ldots, v_m$ und heißt *lineare Hülle* von $v_1, \ldots, v_m$.

   Behauptung:

$$L_m = \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_m) \text{ ist Unterraum von } V,$$

   denn $0 = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_m \in L_m$ Damit ist Bedingung 1) des Unterraumkriteriums erfüllt.

$$(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m) + (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m) = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_m + \mu_m) v_m \in L_m$$

   Damit ist Bedingung 2) des Unterraumkriteriums erfüllt.

$$\lambda(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m) = (\lambda\lambda_1) v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m) v_m \in L_m$$

   Damit ist Bedingung 3) des Unterraumkriteriums erfüllt.

2.1.2.2.1 Beispiele:

1)

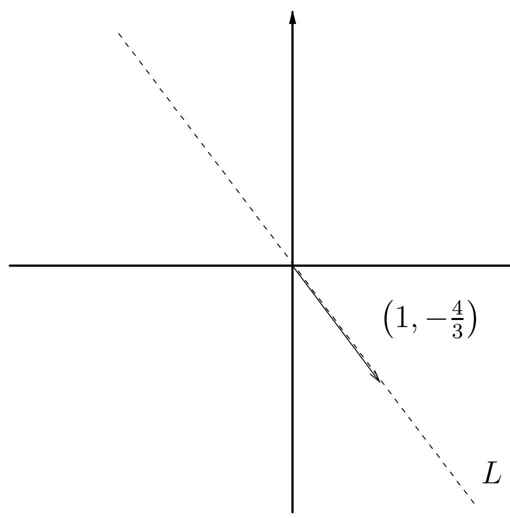
$$\begin{aligned}
\operatorname{lin}\{(1,0,0),(1,2,1)\} &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = (x_1, x_2, x_3) = \lambda(1,0,0) + \mu(1,2,1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x + \mu, 2\mu, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\mathrm{lin}\{(1,0),(0,1)\} &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (x_1,x_2) = \lambda(1,0) + \mu(0,1)\} \\ &= \{(\lambda,\mu) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

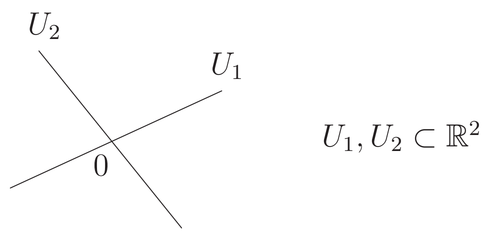
3) Lösungsmenge $L = \{(x,y) \mid 4x + 3y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$L = \left\{ \left(x, -\frac{4}{3}x\right) \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\left(1, -\frac{4}{3}\right) \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{lin}\left(1, -\frac{4}{3}\right)$$



2.1.3 Operationen mit Unterräumen

2.1.3.0.1 Durchschnitt: In 2.1.2.2.4) hatten wir gezeigt: Sei V ein Vektorraum und U_1, U_2 Unterräume von V. Dann ist $U_1 \cap U_2$ ein Unterraum.



2.1.3.0.2 Summe: Im Allgemeinen ist $U_1 \cup U_2$ kein Unterraum. Als „Ersatz“ dient die *Summe*

$$U_1 + U_2 = \{v \in V \mid v = u_1 + u_2 \text{ mit } u_i \in U\}$$

Nach Unterraumkriterium ist $U_1 + U_2$ wieder ein Unterraum, denn

1) $0 = 0 + 0, \quad 0 \in U_1, 0 \in U_2$

2) $(u_1 + u_2) + (\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2) = \underbrace{(u_1 + \widetilde{u}_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + \widetilde{u}_2)}_{\in U_2}$ falls $u_1, \widetilde{u}_1 \in U_1, u_2, \widetilde{u}_2 \in U_2$

3) $\lambda(u_1 + u_2) = \underbrace{\lambda u_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2}_{\in U_2}$

2.1.3.0.3 Beispiele:

- $\{0\} + U = U$
- $U + V = V$
- $U + U = U$, denn $u_1 + u_2 \in U$ für $u_1, u_2 \in U$ also $U + U \subseteq U$. Andererseits ist $u = u + 0 \in U + U \Rightarrow U \subseteq U + U$.

2.1.3.0.4 Behauptung: $U_1 + U_2$ ist die Menge L aller Linearkombinationen, die man aus Elementen von $U_1 \cup U_2$ bilden kann.

Beweis:

1) $u_1 + u_2$ ist Linearkombination zweier Elemente $u_1 \in U_1 \subseteq U_1 \cup U_2$ und $u_2 \in U_2 \subseteq U_1 \cup U_2 \Rightarrow U_1 + U_2 \subseteq L$.

2) Sei $v \in L$. So gibt es $v_1, \ldots, v_m \in U_1 \cup U_2$, so dass

$$\underbrace{v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m}_{\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i}$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

O.B.d.A.[I] sei $v_1, \ldots, v_r \in U_1, v_{r+1}, \ldots, v_m \in U_2$.

$$\Rightarrow v = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i}_{\in U_1{}^{\mathrm{II}}} + \underbrace{\sum_{j=r+1}^{m} \lambda_j v_j}_{\in U_2{}^{\mathrm{II}}}$$

also $v \in U_1 + U_2$.

2.1.3.0.5 Folgerung:

$$\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_m) = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_r) + \mathrm{lin}(v_{r+1}, \ldots, v_m) \text{ für } 1 \leq r \leq m - 1$$

[I] O.B.d.A. – Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

[II] wegen der Unterraum-Eigenschaft von U_i

2.2 Basis und Dimension

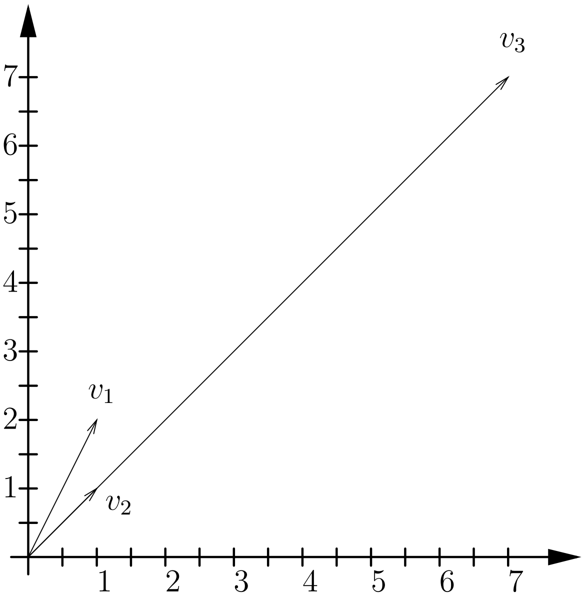
2.2.1 Definition der linearen Unabhängigkeit

Sei $v_1, \ldots, v_m \in V$ und V ein Vektorraum. Man nennt $v_1, \ldots, v_m$ *linear unabhängig*, falls zwischen ihnen *nur* die *triviale Nullrelation* gibt, d.h. aus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ folgt $\lambda_i = 0$ für $i = 1, \ldots, m$.

Andernfalls heißen $v_1, \ldots, v_m$ *linear abhängig*. In diesem Fall gibt es ein $\lambda_j \neq 0, j \in \{1, \ldots, m\}$, so dass $0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$.

2.2.1.1 Beispiele

1) $v_1 = (1, 2), v_2 = (1, 1), v_3 = (7, 7)$



v_1, v_2, v_3 sind linear abhängig in $\mathbb{R}^2$, denn

$$0 \cdot v_1 + 7 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3$$

v_1, v_2 sind jedoch linear unabhängig, denn sei

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0)$$

so folgt

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$$

2) $f_1(x) = 2, f_2(x) = x, f_3(x) = 2.5x, f_4(x) = x^4$ für $x \in \mathbb{R}$
   Dann sind f_1, f_2, f_3, f_4 linear abhängig in $\mathcal{F} := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, denn
   $$0 \cdot f_1(x) + 2.5f_2(x) + (-1)f_3(x) + 0 \cdot f_4(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$
   m.a.W.[III] $f_3 = 2.5f_2$
   f_1, f_2, f_4 sind linear abhängig, denn sei
   $$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_4 f_4(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$
   $2\lambda_1 + \lambda_x + \lambda_4 x^4 = 0$
   speziell:
   $$\left.\begin{array}{r} x = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ x = \pm 1 \Rightarrow 2\lambda_1 \pm \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_4 = 0, \lambda_2 = 0.$$

2.2.2 Charakterisierung der linearen Abhängigkeit

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in V$ sind linear abhängig genau dann, wenn es (mindestens) ein $v_j, j \in \{1, \ldots, m\}$ gibt, mit $v_j \in \operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_m\}$.

Beweis:

($\Rightarrow$) Seien $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig, so gibt es $\lambda_j \neq 0$ mit
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_j v_j + \ldots + \lambda_m v_m = 0$$
$$v_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \ldots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} v_{j-1} - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} v_{j+1} - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_j} v_m$$
$$\Rightarrow v_j \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_m).$$

($\Leftarrow$) Sei $v_j \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_m)$, d.h.
$$v_j = \sum_{\substack{i=1,\\ i \neq j}}^{m} \mu_i v_i \text{ mit } \mu_i \in \mathbb{K} \;\Rightarrow\; \sum_{\substack{i=1,\\ i \neq j}}^{m} \mu_i v_i + (-1)v_j = 0.$$

D.h. es gibt eine nichttriviale Nullrelation zwischen $v_1, \ldots, v_m$.

Zum Beispiel in 1):
$$v_3 = (7,7) = 7 \cdot v_2 + 0 \cdot v_1$$
also $v_3 \in \operatorname{lin}\{v_1, v_2\}$, aber v_1 lässt sich nicht aus v_2, v_3 linear kombinieren.

[III] m. a. W. – mit anderen Worten

2.2.2.1 Weitere Folgerungen

1) Enthält $\{v_1, \ldots, v_m\}$ den Nullvektor, so sind $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig.

2) v_1 ist linear unabhängig $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$.

3) v_1, v_2 sind linear unabhängig genau dann, wenn keine der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen ist.

2.2.3 Definition eines Erzeugendensystems

Man nennt $\{v_1, \ldots, v_m\}$ ein *Erzeugendensystem* von V, falls

$$V = \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_m).$$

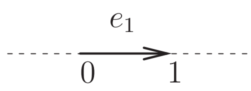
Sind zusätzlich $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig, so heißt $\{v_1, \ldots, v_m\}$ eine *Basis* von V.

2.2.3.1 Beispiele

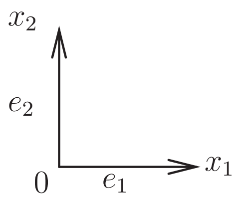
Im $\mathbb{R}^n$ bildet die Menge $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis, wenn

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{i-te Stelle}}, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1).$$

- $\mathbb{R}^1$



- $\mathbb{R}^2$



Diese Basis heißt *kanonische Basis* von $\mathbb{R}^n$ und $e_1, \ldots, e_n$ die *Einheitsvektoren.*

- $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist Erzeugendensystem, denn für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, \ldots, 0, 1) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

  d.h. $\mathbb{R}^n = \operatorname{lin}(e_1, \ldots, e_n)$.

- $e_1, \ldots, e_n$ sind linear unabhängig, denn aus
$$\lambda_1, e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$$
folgt
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Auch $\{e_1, \ldots, e_n, (1, 1, \ldots, 1)\}$ ist Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$, denn
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + 0 \cdot (1, 1, \ldots, 1) \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}^n.$$

Aber: $\{e_1, \ldots, e_n, (1, 1 \ldots, 1)\}$ ist keine Basis, weil
$$(1, 1, \ldots, 1) = e_1 + \ldots + e_n.$$

2.2.4 Eigenschaften einer Basis

2.2.4.0.1 Folgerung: Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich *eindeutig* als Linearkombination von Elementen einer Basis von V darstellen.

Beweis: durch Koeffizientenvergleich (Übungsaufgabe)

2.2.4.0.2 Satz über die Existenz einer Basis: Sei $V = \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_m)$, so besitzt V eine Basis oder $V = \{0\}$.

Beweis:

1) Sind $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig, so ist $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis.
2) Andernfalls gibt es $v_j, j \in \{1, \ldots, m\}$, so dass $v_j \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_m)$.
$$B_{m-1} := B_m \setminus \{v_j\}$$
Dann ist $V = \operatorname{lin}(B_{m-1})$, denn für beliebiges $v \in V$ gilt
$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$$
Außerdem ist
$$v_j = \sum_{\substack{k=1,\\ k \neq j}}^{m} \mu_k v_k$$
$$\begin{aligned} \Rightarrow v = (\lambda_1 + \lambda_j \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_{j-1} + \lambda_j \mu_{j-1}) v_{j-1} \\ + (\lambda_{j+1} + \lambda_j \mu_{j+1}) v_{j+1} + \ldots + (\lambda_m + \lambda_j \mu_m) v_m \end{aligned}$$
$$V \subseteq \operatorname{lin}(B_{m-1}) \subseteq \operatorname{lin}(B_m) = V$$

3) Sind die Vektoren aus B_{m-1} linear abhängig, so verfahre wie im 2. Schritt.

4) Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten, weil

$$|B_m| = m \quad > \quad m-1 = |B_{m-1}|$$

Endergebnis ist eine Menge $B_n, n \in \mathbb{N}$ von linear unabhängigen Vektoren mit

$$V = \mathrm{lin}(B_n)$$

(also eine Basis von V) *oder* mit $B_1 = \{w\}, w \in B_m$ und B_1 linear abhängig.

$$\Rightarrow w = 0 \qquad (V = \mathrm{lin}\{0\} = \{0\})$$

2.2.4.0.3 Bemerkung: Der Beweis zeigt, dass eine Basis ein Erzeugendensystem ist, welches nicht mehr verkürzt werden kann.

2.2.4.1 Wieviele Elemente hat eine Basis?

2.2.4.1.1 Austauschlemma: Sei $B = \{v_1, \ldots, v_m\}$ eine Basis von V. Dann gibt es zu jedem $w \in V, w \neq 0$ ein $v \in B$, so dass

$$B' = (B \setminus \{v\}) \cup \{w\}$$

wieder eine Basis besitzt.

Beweis:

Wegen $V = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_m)$ besitzt w die Darstellung

$$w = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j \tag{2.2.4.1}$$

Weil $w \neq 0$, muss ein $\lambda_j \neq 0$ sein, beispielsweise $\lambda_k \neq 0$ mit $k \in \{1, \ldots, m\}$. Wir setzen $v = v_k$ und überprüfen B' auf Basiseigenschaften:

1) B' ist Erzeugendensystem von V, denn aus (2.2.4.1) folgt:

$$v_k = \frac{1}{\lambda_k} w - \sum_{\substack{j=1,\\ j \neq k}}^{m} \lambda_j v_j \quad \in \mathrm{lin}(B') \quad \Rightarrow \quad V = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_m) \subseteq \mathrm{lin}(B') \subseteq V.$$

2) B' ist linear unabhängig, denn sei

$$\mu_0 w + \sum_{\substack{j=1,\\ j \neq k}}^{m} \mu_j v_j = 0.$$

a) $\mu_0 = 0$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{m} \mu_j v_j = 0 \cdot v_k = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \ldots, \mu_m = 0$$

wegen linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_m$.

b) $\mu_0 \neq 0$
Unter Verwendung von (2.2.4.1) ist

$$(\mu_1 + \lambda_1\mu_0)v_1 + \ldots + (\mu_{k-1} + \lambda_{k-1}\mu_0)v_{k-1} + \mu_0\lambda_k v_k + \ldots + (\mu_m + \lambda_m\mu_0)v_m = 0$$

Das ist nichttriviale Nullrelation der Elemente aus B im Gegensatz zu linearen Unabhängiggkeit. Somit kann der Fall 2b) nicht eintreten.

2.2.4.1.2 Ergänzung zum Austauschlemma: Als v kann jeder Vektor v_j genommen werden, für den in (2.2.4.1) das $\lambda_j \neq 0$ ist.

2.2.4.1.3 Beispiel: $\mathbb{R}^3 = \mathrm{lin}(e_1, e_2, e_3), w = (7, -4, 0) \neq 0$, so gilt

$$w = 7e_1 - 4e_2 + 0e_3$$

In Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ kann w gegen e_1 bzw. gegen e_2 getauscht werden.

2.2.4.1.4 Austauschsatz von Steinitz (1913): Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängige Vektoren. Dann gibt es $n - m$ Vektoren aus B, o.B.d.A. $v_{m+1}, \ldots, v_n$, so dass

$$\{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$$

wieder eine Basis von V bildet. D.h., in B können $v_1, \ldots, v_m$ durch $w_1, \ldots, w_m$ ausgetauscht werden.

Beweis: (über vollständige Induktion nach m)

- *Induktionsanfang:*

  $m = 1$: Aussage des Austauschlemmas

- *Induktionsvorraussetzung:*

  Sei Aussage richtig für $m - 1$ linear unabhängige Vektoren.

- *Induktionsbehauptung:*

  Dann gilt Satz auch für eine Menge $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ von linear unabhängigen Vektoren.

- *Induktionsschluss*

  Auf $C' = C \setminus \{w_m\}$ können wir (IV) anwenden. Folglich ist

  $$B' = \{w_1, \ldots, w_{m-1}, v_m, \ldots, v_n\}$$

  eine Basis von V.

  Einbauen von w_m in B' durch Anwendung des Austauschlemmas. Beachte $w_m \neq 0$, da C linear unabhängig ist.

  $$\Rightarrow (B' \setminus \{v\}) \cup \{w_m\}$$

  ist wieder Basis mit $v \in B'$. Dabei kann $v \in \{v_m, \ldots, v_n\}$ gewählt werden, denn in der Darstellung

  $$w_m = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_{m-1} w_{m-1} + \lambda_m v_m + \ldots + \lambda_n v_n$$

  können nicht alle $\lambda_i = 0$ sein, sonst

  $$w_m = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_{m-1} w_{m-1}$$

  im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von C.

  Ergänzung zum Austauschlemma ergibt die Behauptung.

2.2.4.2 Wichtige Folgerungen aus dem Austauschsatz

1) Jede Menge $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ von linear unabhängigen Vektoren kann zu einer Basis von V ergänzt werden (*Basisergänzungssatz*).

   Dabei gilt
   $$|C| = m \quad \leq \quad n = |B|.$$

2) Alle Basen von V haben die gleiche Anzahl von Elementen. Diese Zahl heißt *Dimension* des Vektorraums V $(\dim V)$.

   Beweis:

   Aus Folgerung 1. ergibt sich für 2 Basen B_1, B_2:

   $$|B_2| \leq |B_1| \qquad (B = B_1, C = B_2)$$

   und
   $$|B_1| \leq |B_2| \qquad (B = B_2, C = B_1).$$

   Beispiel: $\mathbb{C}^n = \mathrm{lin}(e_1, \ldots, e_n)$, $e_1, \ldots, e_n$ Basis $\Rightarrow$ $\dim \mathbb{C}^n = n$.

   Ergänzung: Für $V = \{0\}$ wird $\dim V = \dim \{0\} = 0$ gesetzt.

3) Sei $\dim V = n$, so hat jede Menge C linear unabhängige Vektoren höchstens n Elemente. Ist $|C| = n$, so bildet C eine Basis von V.

   Gegenbeispiel:

   In $\mathcal{F} := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ gibt es *für jedes* $k \in \mathbb{N}$ genau k linear unabhängige Elemente, beispielsweise

$$p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, \ldots, p_k(x) = x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Überprüfung auf lineare Unabhängigkeit: Sei

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \; x(\lambda_1 + x(\lambda_2 + x(\lambda_3 + \ldots + x(\lambda_{k-1} + x\lambda_k \underbrace{)\ldots)}_{\substack{k-1\\ \text{Klam-}\\ \text{mern}}} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + x(\lambda_2 + \ldots + x(\lambda_{k-1} + x\lambda_k)\ldots) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

   Mit $x = 0$ folgt: $\lambda_1 = 0$

$$\Rightarrow \; x(\lambda_2 + \ldots + x\lambda_k)\ldots) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_k = 0.$$

   D.h., in $\mathcal{F}$ gibt es Mengen linear unabhängiger Elemente beliebiger Anzahl. Somit kann $\mathcal{F}$ keine endliche Dimension haben. (Schreibweise: $\dim \mathcal{F} = \infty$)

4) Seien U_1, U_2 zwei Unterräume des Vektorraums V mit $U_1 \subseteq U_2$. Dann gilt $\dim U_1 \leq \dim U_2$.

$$\dim U_1 = \dim U_2 \quad \Leftrightarrow \quad U_1 = U_2.$$

5) *Dimensionsformel:*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

   Beweis:

   a) Wir wählen Basis $\{v_1, \ldots, v_m\}$ von $U_0 := U_1 \cap U_2 \subseteq V$ und ergänzen diese zu Basen

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_k\} \text{ von } U_1 \\ B_2 &:= \{v_1, \ldots, v_m, w_{m+1}, \ldots, w_l\} \text{ von } U_2. \end{aligned}$$

   Mit $C := B_1 \cup B_2 = \{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_l\}$ gilt

$$\begin{aligned} |C| &= |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2| = k + l - m \\ &= \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_0. \end{aligned}$$

b) Wir zeigen: C ist eine Basis von $U_1 + U_2$.

b1) Wir haben

$$U_1 + U_2 = \operatorname{lin} B_1 + \operatorname{lin} B_2 = \operatorname{lin} C$$

$$\Rightarrow C \text{ ist Erzeugendensystem von } U_1 + U_2.$$

b2) Zur linearen Unabhängigkeit betrachten wird die Nullrelation

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{j=m+1}^{l} \mu_j w_j = 0 \tag{2.2.4.2}$$

$$\underbrace{-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i}_{\in U_1} = \underbrace{\sum_{j=m+1}^{l} \mu_j w_j}_{\in U_2} \quad \in U_1 \cap U_2 = \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_m).$$

Folglich gilt die Darstellung

$$\mu_{m+1} w_{m+1} + \ldots + \mu_l w_l = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m.$$

Wegen linearer Unabhängigkeit von B_2 muss

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0, \quad \mu_{m+1} = \ldots = \mu_l = 0$$

sein. Damit lautet (2.2.4.2):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0.$$

Wegen linearer Unabhängigkeit von B_1 muss

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

sein, also (2.2.4.2) kann nur trivial sein und C ist Basis.

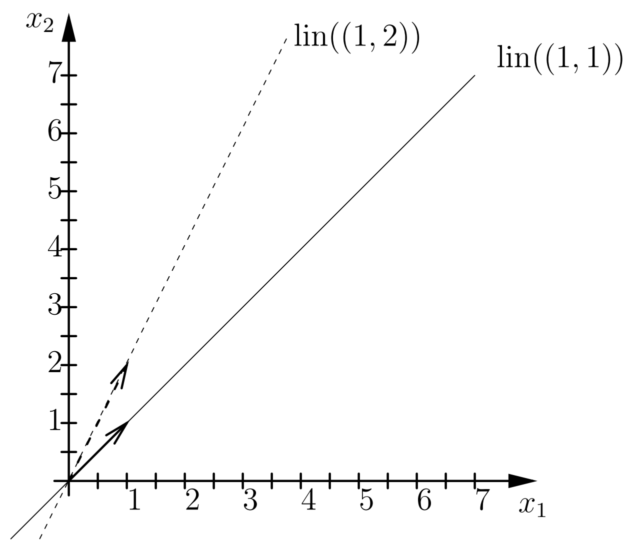
Spezialfall: Ist $U_1 + U_2 = V$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, so heißen U_1 und U_2 *komplementäre* Unterraum (Bezeichnung: $U_1 \oplus U_2$ als *direkte Summe* von U_1 und U_2).

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V.$$

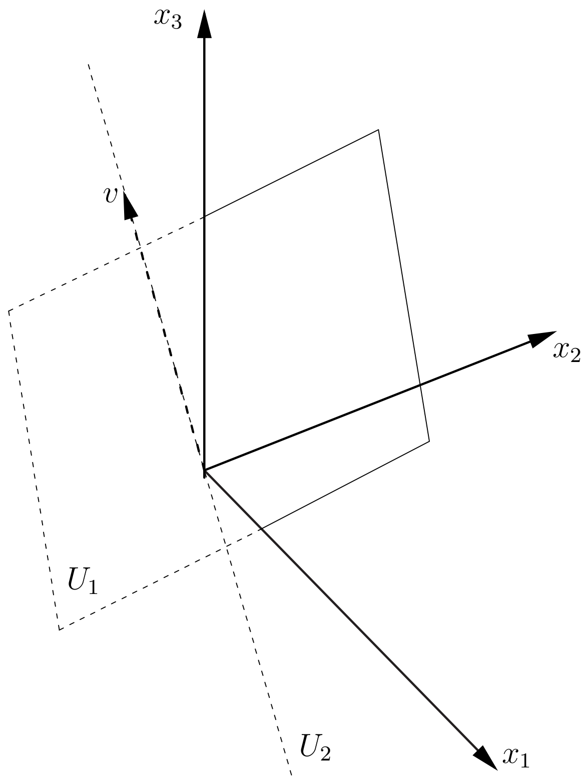
Beispiele:

i) Im $\mathbb{R}^2$ sind je 2 verschiedene eindimensionale Unterraum komplementär, z.B.

$$\operatorname{lin}((1,1)) \oplus \operatorname{lin}((1,2)) = \mathbb{R}^2$$



ii) Im $\mathbb{R}^3$ ist jeder zweidimensionale Unterraum U_1 komplementär zu jedem Unterraum $U_2 = \text{lin}(v)$ mit $v \notin U_1$.



6) Allgemein gilt: Jeder Unterraum U_1 des Vektorraums V besitzt einen komplementären Unterraum.

Beweis:

a) Sei U_1 ein Unterraum mit der Basis

$$B_1 := \{v_1, \ldots, v_m\}.$$

Ergänze diese zu einer Basis

$$B := \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$$

von V. Setze

$$U_2 := \operatorname{lin}\{v_{m+1}, \ldots, v_n\}.$$

Dann gilt:

$$U_1 + U_2 = \operatorname{lin} B_1 + \operatorname{lin}\{v_{m+1}, \ldots, v_n\} = \operatorname{lin} B = V.$$

b) Zu zeigen $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Sei $v \in U_1 \cap U_2$, so gilt

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \quad \in U_1$$

und

$$v = \lambda_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \lambda_n v_n \quad \in U_2.$$

Das liefert

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m}_{=v} \underbrace{-\lambda_{m+1} v_{m+1} - \ldots - \lambda_n v_n}_{=-v} = v + (-v) = 0.$$

Wegen linearen Unabhängigkeit von B kann diese Nullrelation nur trivial sein, also $\lambda_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$

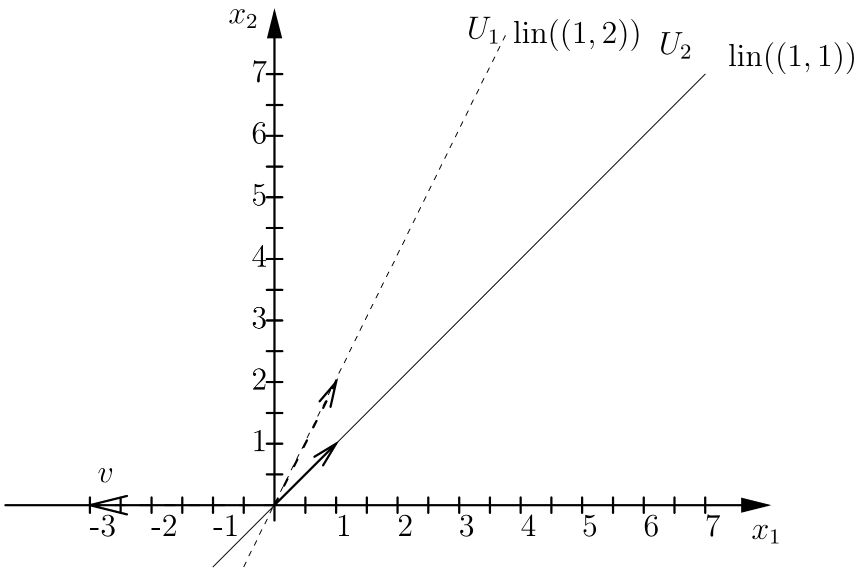
$$\Rightarrow v = 0.$$

Bedeutung: Eindeutige Zerlegung jedes Vektors $v \in V$ bezüglich komplementärer Unterraum (s. Übungsaufgabe).

Zum Beispiel:

$$v = (-3, 0) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -3 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_1 &= -6 \end{aligned}$$

$$(-3, 0) = -6(1,1) + 3(1,2)$$



2.3 Lineare Abbildungen

Wir untersuchen hier „strukturerhaltende" Abbildungen zwischen Vektorräumen und Fragestellungen wie

- Wann sind zwei Vektorräume im wesentlichen gleich?
- Durch welche Daten ist ein Vektorraum eindeutig bestimmt?

2.3.1 Definitionen

Seien V und W Vektorräume über demselben Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *lineare Abbildung* oder *Homomorphismus*, wenn für alle $v, v' \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\begin{array}{ll} \textit{Additivität:} & f(v + v') = f(v) + f(v') \ , \\ \textit{Homogenität:} & f(\lambda v) = \lambda f(v) \ . \end{array}$$

Die Menge aller Homomorphismen von V nach W wird mit $\mathrm{Hom}(V, W)$ bezeichnet.

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt

Isomorphismus,	wenn sie bijektiv,
Endomorphismus,	wenn $V = W$ und
Automorphismus,	wenn sie bijektiv und $V = W$

ist.
Wir bezeichnen den Teil von W, welcher von f erfaßt wird, mit

$$\mathrm{Bild}(f) := \{w \in W \mid \text{es gibt } v \in V \text{ mit } f(v) = w\} \ ,$$

und außerdem sei

$$\mathrm{Kern}(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) \ .$$

2.3.2 Eigenschaften

1) $f(0) = 0$, denn $f(0) = f(0 \cdot v) \underset{\text{Hom.}}{=} 0 \cdot f(v) = 0$ mit $v \in V$

2) f ist surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Bild}(f) = W$

   (Beweis nach Definition klar)

3) f ist injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{0\}$

   (Beweis siehe Übungsaufgabe)

4) $\mathrm{Bild}(f)$ ist Unterraum von W.

   Beweis: (Anwendung des Unterraumkriteriums)

   i) $\mathrm{Bild}(f) \neq \emptyset$, weil $0 \in \mathrm{Bild}(f)$ nach 1)

   ii) Ist $w \in \mathrm{Bild}(f)$, so

$$\lambda w \underset{\text{Def.}}{=} \lambda f(v) \underset{\text{Hom.}}{=} f(\lambda v) \Rightarrow \lambda w \in \mathrm{Bild}(f)$$

   iii) Ist $w_1, w_2 \in \mathrm{Bild}(f)$, so

$$w_1 + w_2 \underset{\text{Def.}}{=} f(v_1) + f(v_2) \underset{\text{Add.}}{=} f(v_1 + v_2) \quad \Rightarrow w_1 + w_2 \in \mathrm{Bild}(f)$$

Beispiele:

a) Nullabbildung: $V \to \{0\}$

b) identische Abbildung $\mathrm{id}_V : V \to V$

c) allgemeiner: Wähle festes $\alpha \in \mathbb{K}$ und definiere $f(v) = \alpha v$

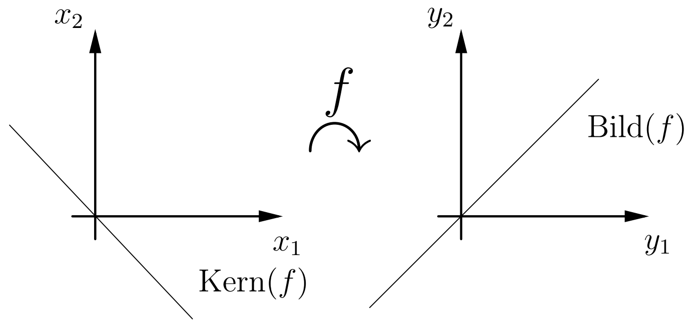
d)

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2) \end{aligned}$$

ist lineare Abbildung.

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(f) &= \{(y_1, y_2) \mid y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_1 + x_2 \text{ mit } x_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(y_1, y_1) \mid y_1 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{lin}\left((1,1)\right) \end{aligned}$$

$$\mathrm{Kern}(f) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\} = \{(x_1, -x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{lin}\left((1,-1)\right)$$



e)

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1 + x_2 + 4 \end{aligned}$$

ist *kein* Homomorphismus, denn

$$f\left((0,0)\right) = 4 \neq 0$$

f)

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1 x_2 \end{aligned}$$

ist *kein* Homomorphismus, denn

$$f\left(2(x_1, x_2)\right) = f\left((2x_1, 2x_2)\right) = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1 x_2 \neq 2f\left((x_1, x_2)\right)$$

5) Kern(f) ist Unterraum von V.
(Beweis siehe Übungsaufgabe)

2.3.3 Weitere wichtige lineare Abbildung

Sind U_1, U_2 komplementäre Unterräume des Vektorraums V, d.h. $U_1 + U_2 = V$, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, so gilt $v = u_1 + u_2$ mit eindeutig bestimmten $u_i \in U_i$.

$$P : V \to V \text{ mit } P(v) = P(u_1 + u_2) := u_1, \; P = P_{U_1}$$

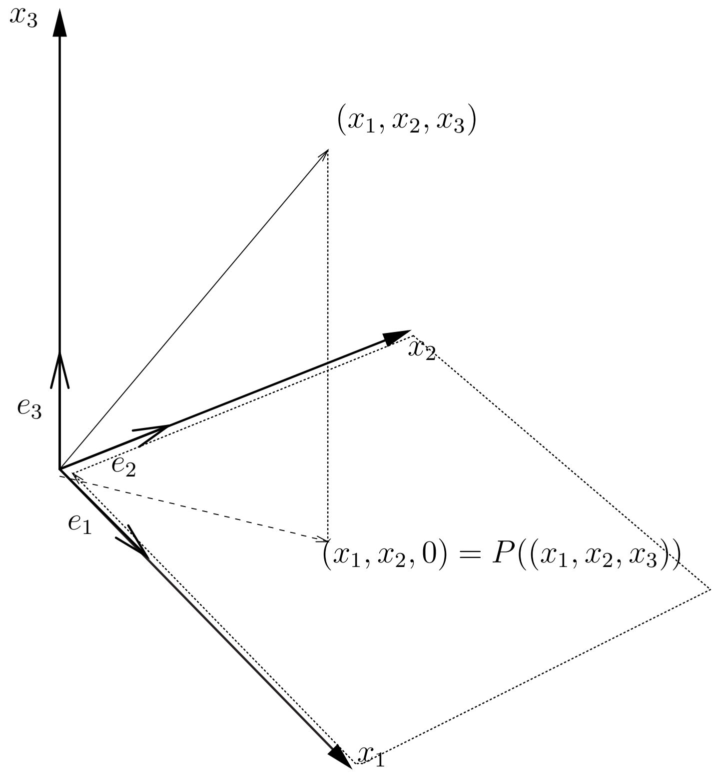
heißt *Projektion* von V auf U_1.

2.3.3.0.1 Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} + \{(0, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{lin}(e_1, e_2) + \text{lin}(e_3) \end{aligned}$$

Projektion P von $\mathbb{R}^3$ auf U_1 ist folglich

$$P((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2, 0) \; .$$



Die Projektion $P : V \to V$ ist eine lineare Abbildung, denn

$$P(\lambda v) = P(\lambda(u_1 + u_2)) = P(\underbrace{\lambda u_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2}_{\in U_2}) = \lambda u_1 = \lambda P(v)$$

$$\begin{aligned} P(v + v') &= P((u_1 + u_2) + (u_1' + u_2')) \\ &= P(\underbrace{(u_1 + u_1')}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + u_2')}_{\in U_2}) \qquad\qquad v' = u_1' + u_2' \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad u_i' \in U_i \\ &= u_1 + u_1' = P(v) + P(v') \end{aligned}$$

$\text{Bild}(P) = U_1, \text{Kern}(P) = U_2$, denn sei

$$P(v) = 0 \Leftrightarrow u_1 = P(u_1 + u_2) = 0 \Leftrightarrow v = 0 + u_2$$

2.3.4 Bemerkungen

1) Hintereinanderausführung linearer Abbildungen ergibt wieder lineare Abbildung, denn

$$(g \circ f)(\lambda v) = g(f(\lambda v)) = g(\lambda f(v)) = \lambda g(f(v)) = \lambda(g \circ f)(v)$$

$$(g\circ f)(v+v') = g(f(v+v')) = g(f(v)+f(v')) = g(f(v))+g(f(v')) = (g\circ f)(v)+(g\circ f)(v')$$

für alle $v, v' \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn f, g lineare Abbildungen sind.

2) Die Menge $\mathrm{Hom}(V, W)$ bildet selbst einen Vektorraum, wenn man definiert:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(v) &:= f_1(v) + f_2(v) \\ (\lambda f_1)(v) &:= \lambda f_1(v) \end{aligned} \qquad \text{für } v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

und $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Nachweis der Linearität von $f_1 + f_2$, λf_1 und Vektorraum-Eigenschaft sei Übungsaufgabe.

2.3.5 Bestimmung von linearen Abbildungen

durch die Bilder einer Basis $B := \{v_1, \ldots, v_n\}$ des Vektorraums V.

1) Es gibt zu jedem n-Tupel $(w_1, \ldots, w_n)$ von Vektoren $w_i \in W$ genau eine lineare Abbildung

$$f : V \to W$$

mit $f(v_i) = w_i$. M.a.W.[IV]: Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basisvektoren von V eindeutig festgelegt.

Beweis:

a) (Existenz von f)
Für $v \in V = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_n)$ gilt die eindeutige Darstellung

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{K} \tag{2.3.5.3}$$

Wir definieren

$$f(v) := \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n$$

Dann ist $f : V \to W$ und f linear.

$$f(v_i) = f(0 \cdot v_1 + \ldots + 1 \cdot v_i + \ldots + 0 \cdot v_n) = 0 \cdot w_1 + \ldots + 1 \cdot w_i + \ldots + 0 \cdot w_n = w_i$$

b) (Eindeutigkeit von f)
Sei $f, f' \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $f(v_i) = w_i$ und $f'(v_i) = w_i$. Dann gilt

$$f(v) \underset{(2.3.5.3)}{=} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f'(v_i) = f'\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = f'(v)$$

für beliebiges $v \in V$.

$$\Rightarrow f = f'$$

[IV] M.a.W. – Mit anderen Worten

Bedeutung: Die gesamte Information über eine lineare Abbildung $f : V \to W$ steckt in $w_i \in W$. Ist $\dim W = m$, so sind die $w_1, \ldots, w_n$ durch $n \cdot m$ reelle Zahlen festgelegt. Somit kann mit einer linearen Abbildung effektiv auf Computern gerechnet werden. Man versucht deshalb viele nichtlineare Probleme auf lineare zurückzuführen.

2) Die lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn

$$C := \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$$

eine Basis von W bilden.

Beweis:

($\Rightarrow$) Sei f bijektiv. Wir prüfen C auf lineare Unabhängigkeit:
Sei

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(v_i) = 0,$$

so

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i\right) = 0,$$

d.h. $\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \in \mathrm{Kern}(f)$. Da $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = 0,$$

also $\mu_i = 0$ wegen linearer Unabhängigkeit von B.
Wir zeigen $\mathrm{lin}\, C = W$. Sei $w \in W$, so gibt es wegen der Surjektivität von f ein $v \in V$ mit $w = f(v)$. Benutze (2.3.5.3), so folgt

$$w = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)$$

($\Leftarrow$) Sei C eine Basis von W. Zur Überprüfung der Injektivität berechnen wir $\mathrm{Kern}(f)$.
Sei $v \in V$ mit $f(v) = 0$. Mit (2.3.5.3) folgt:

$$0 = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i).$$

Wegen linearen Unabhängigkeit von C ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, also $v = 0$.
D.h. $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.
Zur Surjektivität von f: Jedes $w \in W$ können wir eindeutig bezüglich der Basis darstellen:

$$w = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right)$$

Mit $u := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ ist $u \in V$ und $w = f(u)$.

3) Wählen wir in 1) die $w_1, \ldots, w_n$ als Basis von W ($\dim W = n$), so ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus, d.h. es gilt der *Fundamentalsatz für endlich dimensionale Vektorräume*:

   Je zwei Vektorräume der *gleichen Dimension* sind isomorph.

   Anwendungen:

   a) Je zwei Basen eines Vektorraums V mit $\dim V = n$ können durch genau eine lineare Abbildung ineinander überführt werden. Diese Abbildung ist ein Automorphismus (*Basistransformation*).

   b) Wählt man $W = \mathbb{K}^n = \mathrm{lin}(e_1, \ldots, e_n)$ und $f(v_i) = e_i$, so ist f ein Isomorphismus und

$$\begin{aligned} f(v) &\underset{(2.3.5.3)}{=} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = (\lambda_i, \ldots, \lambda_n) \end{aligned} \qquad e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

   (Vektor der *Koordinaten* von v bezüglich Basis $v_1, \ldots, v_n$)

   D.h.: Rechnen in V ist dasselbe wie Rechnen mit den Koordinatenvektoren (bezüglich festgewählter Basis) im $\mathbb{K}^n$.

2.3.6 Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Sei $\dim V = n$ und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = n \qquad (2.3.6.4)$$

Beweis:

a) Sei $\{v_1, \ldots, v_r\}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$. Wir ergänzen diese zu einer Basis

$$B := \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$$

von V und setzen $w_i := f(v_{r+i}), i = 1, \ldots, n - r$.

Für $v \in V = \mathrm{lin}\,(B)$ ist

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)$$

$$\Rightarrow f(v) = \lambda_i 0 + \ldots + \lambda_r 0 + \lambda_{r+1} w_1 + \ldots + \lambda_n w_{n-r}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Bild}(f) = \mathrm{lin}(w_1, \ldots, w_{n-r})$$

b) Wir zeigen $w_1, \ldots, w_{n-r}$ ist Basis von Bild(f), d.h. die lineare Unabhängigkeit von $w_1, \ldots, w_{n-r}$. Sei

$$\mu_1 w_1 + \ldots + \mu_{n-r} w_{n-r} = 0$$

so

$$f(\mu_1 v_{r+1} + \ldots + \mu_{n-r} v_n) = \sum_{i=1}^{n-r} \mu_i w_i = 0$$

also

$$\mu_1 v_{r+1} + \ldots + \mu_{n-r} v_n \in \mathrm{Kern}(f) = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_r)$$

$$\mu_1 v_{r+1} + \ldots + \mu_{n-r} v_r = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \ .$$

Wegen linearer Unabhängigkeit von B muss

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0, \mu_1 = \ldots = \mu_{n-r} = 0$$

sein. Somit sind $w_1, \ldots, w_{n-r}$ linear unabhängig und

$$\dim(\mathrm{Bild}(f)) = n - r$$

Kapitel 3

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

3.1 Matrizenrechnung

3.1.1 Definition einer Matrix

Eine $m \times n$-*Matrix* (über $\mathbb{K}$) ist eine Anordnung von $m \cdot n$ reellen Zahlen in ein rechteckiges Schema aus m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i\,=\,1,\dots,m,\\ j\,=\,1,\dots,n}} \qquad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

$$z_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \text{ – } i\text{-te } \textit{Zeile} \text{ von } A,\ i = 1, \dots, n$$

$$s_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad \text{– } j\text{-te } \textit{Spalte} \text{ von } A,\ j = 1, \dots, n$$

Die Menge aller reellen (bzw. komplexen) $m \times n$-Matrizen wird mit $\mathbb{R}^{m\times n}$ (bzw. $\mathbb{C}^{m\times n}$) bezeichnet.

3.1.1.0.1 Spezialfälle:

- $\mathbb{K}^{1\times n} = \mathbb{K}^n$, also $z_i \in \mathbb{K}^n$
- $\mathbb{K}^{m\times 1} = \mathbb{K}_m$, also $s_j \in \mathbb{K}_m$

3.1.2 Operationen mit Matrizen

i) Sind $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, also $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, so definiert man

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \qquad (\textit{Summe} \text{ von } A \text{ und } B)$$
$$\lambda A := (\lambda a_{ij}) \qquad (\textit{skalares Vielfaches} \text{ von } A,\ \lambda \in \mathbb{K})$$

Mit diesen Operationen wird $\mathbb{K}^{m\times n}$ zu einem Vektorraum. Nullelement ist die *Nullmatrix*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 624.37 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 2.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 624.37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -5.5 & 0 & 626.87 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda & -1\lambda & 0 \\ 0.5\lambda & 0 & 2.5\lambda \end{pmatrix}$$

ii) *Transposition:* Die transponierte Matrix A^T zu $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ entsteht aus A, indem man die Rollen von Zeilen und Spalten vertauscht.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\tilde{a}_{ji})_{\substack{j=1,\dots,n, \\ i=1,\dots,m}} \qquad , A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}\ ,\ \tilde{a}_{ji} = a_{ij}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0.5 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}, A^T = \left(z_1^T, \dots, z_m^T\right)$$

insbesondere: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_m \Leftrightarrow x^T = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$

iii) *Produkt von Matrizen:*

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m, \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{K}^{m\times n}, B = (b_{kl})_{\substack{k=1,\dots,r, \\ l=1,\dots,s}} \in \mathbb{K}^{r\times s}$, so gibt es AB, falls Spaltenanzahl n von A gleich Zeilenzahl r von B ist (A und B heißen in diesem Fall *verkettet*) und definiert wird

$$AB = A \cdot B := \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl}\right)_{\substack{i=1,\dots,m, \\ l=1,\dots,s}} \qquad \Rightarrow AB \in \mathbb{K}^{m\times s}$$

$$\begin{pmatrix} - & - & & - \\ - & - & & - \\ \vdots & & & \\ \blacksquare & \blacklozenge & \cdots & \blacktriangledown \\ \vdots & & & \\ - & - & & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} - & - & \cdots & \square & \cdots & - \\ - & - & & \lozenge & & - \\ & & & \vdots & & \\ - & - & & \triangledown & & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - & & - & & - \\ - & - & & - & & - \\ & & & \vdots & & \\ - & - & \cdots & \blacksquare\square + \blacklozenge\lozenge + \cdots + \blacktriangledown\triangledown & \cdots & - \\ & & & \vdots & & \\ - & - & & - & & - \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1l} & \dots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nl} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} \right)$$

Beispiele:

1.
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 2.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ existiert nicht}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_n$, so ist

$$Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \in \mathbb{K}_m$$

Anwendung: lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right. \Leftrightarrow \; Ax = b$$

mit gegebenen *Koeffizienten* $a_{ij} \in \mathbb{K}$ und gegebenem *Absolutglied(vektor)*

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_m.$$

4. Für $x \in \mathbb{K}_n$ und $y \in \mathbb{K}^n$, so ist

$$xy = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ \vdots & & & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix} = (x_iy_j)_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

$$yx = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_ix_i \in \mathbb{K}^{1\times 1} = \mathbb{K}$$

Für die Matrizenmultiplikation gelten folgende Gesetze:

a) *Distributivität*

$$A(B+C) = AB + BC, \quad (A+B)C = AC + BC$$

b) *Assoziativität*

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

$$(AB)C = A(BC)$$

c) Im Allgemeinen gilt $AB \neq BA$ (die Matrizenmultiplikation ist *nicht* kommutativ).

d) Produkt zweier Matrizen $A \neq 0$ und $B \neq 0$ kann trotzdem Nullmatrix sein (d.h. Matrizenmultiplikation ist *nicht nullteilerfrei*).

Beispiel zu c), d):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

3.1.3 Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen

3.1.3.0.1 Darstellungssatz: Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann ist $f : \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_m$ definiert durch

$$f(x) = f_A(x) := Ax \tag{3.1.3.1}$$

für $x \in \mathbb{K}_n$ eine lineare Abbildung. Umgekehrt gibt es zu jedem $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}_n, \mathbb{K}_m)$ genau eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit (3.1.3.1).

Beweis:

1) $f(x) = Ax$ ist additiv und homogen in x wegen Rechengesetzen 3a) und 3b).

$$(A(x+y) = Ax + Ay, A(\lambda x) = \lambda(Ax))$$

2) Sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}_n, \mathbb{K}_m)$. Zeige Existenz von A:

Für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_n$ gilt

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j^T, \qquad e_j^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (j-te Zeile)}$$

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j^T\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j^T) = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$$

mit $v_j := f(e_j^T), v_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ \vdots \\ v_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_m, j = 1, \ldots, n$. Setze

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \ldots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

Dann ist $f(e_j^T) = Ae_j^T$ und

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j A e_j^T = \sum_{j=1}^{n} A x_j e_j^T = A \sum_{j=1}^{n} x_j e_j^T = Ax$$

3) Eindeutigkeit von A. Seien $A, A' \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit

$$f(x) = Ax, f(x) = A'x$$

für alle $x \in \mathbb{K}_n$. Speziell mit $x = e_j^T$ ist

$$Ae_j^T = A'e_j^T, \qquad (A' = (a'_{ij}))$$

d.h.

$$s_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = s'_j = \begin{pmatrix} a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{mj} \end{pmatrix}$$

also $a_{ij} = a'_{ij}$ für alle $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.

3.1.3.0.2 Bemerkung:

i) Die Spalten von A sind die Bilder der Einheitsvektoren $e_1^T, \ldots, e_n^T \in \mathbb{K}_n$.

ii) Nach Fundamentalsatz ist $\mathbb{K}_n$ zu jedem n-dimensionalen Vektorraum isomorph. Deshalb gibt es zu jeder linearen Abbildung $f : V \to W$

$$\dim V = n, \dim W = m$$

eine *Darstellungsmatrix* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. A hängt ab von den gewählten Basen in V und W.

iii) Da man jede Matrix A als lineare Abbildung interprtieren kann, unterscheidet man gelegentlich nicht zwischen linearen Abbildungen und Matrizen und schreibt für $f = f_A$, definiert durch (3.1.3.1), auch kurz A.

3.1.3.1 Interpretation der Matrizenoperationen

i) $A+B, \lambda A$ sind die Darstellungsmatrizen der linearen Abbildungen $f_A + f_B$ bzw. λf_A, d.h. $f_{A+B} = f_A + f_B$, $f_{\lambda A} = \lambda \cdot f_A$.

ii) $AB, B = (b_{jl})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ l=1,\ldots,s}}$ ist die Darstellungsmatrix der verketteten Abbildung $f_A \circ f_B$

$$f_{AB} = f_A \circ f_B, \quad \mathbb{K}_s \xrightarrow{f_B} \mathbb{K}_n \xrightarrow{f_A} \mathbb{K}_m$$

Dabei

$$\mathbb{K} \ni e_l^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{f_B} Be_l^T = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1l} \\ \vdots \\ b_{nl} \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}_n} \xmapsto{f_A} ABe_l^T = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{jl} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}b_{jl} \end{pmatrix}, \qquad l = 1, \ldots, s$$

3.1.3.2 Spezialfälle

a) Ist $f = \mathrm{id}_{\mathbb{K}_n}$, so ist $f(e_j^T) = e_j^T$, $j = 1, \ldots, n$.

Darstellungsmatrix ist

$$\left(e_1^T, \ldots, e_n^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = E(= E_n)$$

E heißt *Einheitsmatrix* und hat die andere Darstellung

$$E = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad E = (\delta_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \quad \textit{Kronecker-Symbol}$$

b) Ist f_A ein Isomorphismus, d.h. f_A bijektiv, so heißt die zugehörige Matrix A *invertierbar* oder *regulär* und die Darstellungsmatrix zu $(f_A)^{-1}$ wird mit A^{-1} bezeichnet (*inverse Matrix* zu A).

3.1.3.3 Folgerungen

i) Jede invertierbare Matrix ist quadratisch, weil die Dimensionen von Bild- und Urbildraum bei Isomorphismen gleich sind.

ii) $(A^{-1})^{-1} = A$, weil $(f_A^{-1})^{-1} = f_A$

iii) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, weil

- $f_A \circ f_{A^{-1}} = f_A \circ (f_A)^{-1} = \mathrm{id} = f_E$ und
- $f_{A^{-1}} \circ f_A = (f_A)^{-1} \circ f_A = \mathrm{id} = f_E$

iv) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

v) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = A^{-T}$ (A^{-T} heißt die zu A *kontragrediente Matrix.*)

3.1.3.3.1 Beispiel: Berechnung von $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

Diese Inverse lässt sich gemäß 3) bestimmen aus der Beziehung:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2a & 4a+b \\ 2c & 4c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \qquad & 4a+b &= 0 \\ 2c &= 0 \qquad & 4c+d &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, c = 0, b = -2, d = 1$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.3.3.2 Anwendung:

i) Die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit invertierbarem A ist gegeben durch
$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad Ex = A^{-1}b$$
d.h.
$$x = A^{-1}b$$

ii) Verhalten der Koordinaten bei Basistransformation:
Frage: Wie verändern sich die Koordinaten eines Vektors bei einem Basiswechsel?
Sei V ein Vektorraum mit der Basis $B := \{b_1, \ldots, b_n\}$und $B' := \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ eine weitere Basis von V. Für jeden Vektor $v \in V$ gibt es eindeutige Darstellungen
$$v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n \quad \text{und} \quad v = x'_1 b'_1 + \ldots + x'_n b'_n \quad \text{mit } x_i, x'_i \in \mathbb{K}. \tag{3.1.3.2}$$
Berechnung der "neuen" Koordinaten $(x'_1, \ldots, x'_n) =: x'^T \in \mathbb{K}^n$ aus den "alten" $(x_1, \ldots, x_n) =: x^T \in \mathbb{K}^n$:
Jedes $b'_i \in B'$ läßt sich bez. B darstellen durch
$$b'_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} b_j, \tag{3.1.3.3}$$
d.h., die Basistransformation von B auf B' ist gegeben durch eine Matrix $F = (f_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *(Matrix der Basistransformation)*. Dabei ist F invertierbar, weil eine

Basistransformation stets bijektiv ist. Die Gleichungen (3.1.3.3) lassen sich kompakt schreiben in der Form

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Setzt man nun in der zweiten Gleichung von (3.1.3.2) die Darstellung (3.1.3.3) ein, so ergibt sich

$$v = \sum_{k=1}^{n} x'_k b'_k = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} f_{kj} x'_k \right) b_j.$$

Da die Koordinaten bez. B eindeutig bestimmt sind, folgt somit aus der ersten Gleichung von (3.1.3.2)

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} f_{kj} x'_k \quad \text{für } j = 1, \ldots, n \quad \Leftrightarrow \quad x = F^T x' \quad \Leftrightarrow \quad x' = F^{-T} x.$$

3.2 Rangbestimmung

3.2.1 Definition des Rangs einer Matrix

3.2.1.0.1 Definition: Sei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = (s_1, s_2, \ldots, s_n) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$ mit $s_j \in \mathbb{K}_m$, $z_i \in \mathbb{K}^n$.
$\dim \operatorname{lin}(s_1, \ldots, s_n) =$ *Spaltenrang* von $A (= \operatorname{Sr}(A)) =$ Maximalzahl linear unabh. Spalten
$\dim \operatorname{lin}(z_1, \ldots, z_m) =$ *Zeilenrang* von $A (= \operatorname{Zr}(A)) =$ Maximalzahl linear unabh. Zeilen

3.2.1.0.2 Satz:

$$\text{Spaltenrang} = \text{Zeilenrang} \tag{3.2.1.4}$$

3.2.1.0.3 Bemerkung:

i) Für die Matrix A bezeichnet diese gemeinsame Zahl den *Rang* von A ($\operatorname{Rang}(A)$).

ii)
$$\dim \operatorname{Bild}(f_A) = \dim \operatorname{lin}\left(s_1, \quad \ldots \quad, s_n\right) = \operatorname{Rang}(A)$$

z.B. $\operatorname{Rang}(E_n) = n$

3.2.1.0.4 Hilfssatz: Sei $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_r & x_{r+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times(r+1)}, \quad x_i \in \mathbb{K}_m$

$$x_{r+1} = \sum_{p=1}^{r} \lambda_p x_p \tag{3.2.1.5}$$

und

$$X' = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_r \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times r}$$

so stimmt Zeilen- und Spaltenrang von X und X' überein.

Beweis:

a)

$$\mathrm{Sr}(X) = \dim \mathrm{lin}\left(x_1, \quad \dots \quad, x_r \quad, x_{r+1}\right) = \dim \mathrm{lin}\left(x_1, \quad \dots \quad, x_r\right) = \mathrm{Sr}(X')$$

b)

$$X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}, \quad y_i = (x_{i1}, \dots, x_{ir}, x_{i,r+1}), \quad y'_i = (x_{i1}, \dots, x_{ir})$$

Sei

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i = 0 \text{ mit } \mu_i \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i y'_i = 0$$

Umgekehrt: Sei

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i y'_i = 0 \tag{3.2.1.6}$$

Aus (3.2.1.5) folgt

$$x_{i,r+1} = \sum_{p=1}^{r} \lambda_p x_{ip} \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i x_{i,r+1} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=1}^{r} \mu_i \lambda_p x_{ip} = \sum_{p=1}^{r} \lambda_p \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \mu_i x_{ip}}_{=0 \text{ aus } (3.2.1.6)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i (y'_i, x_{i,r+1}) = 0$$

D.h. lineare Unabhängigkeit der Zeilen von X ist dieselbe wie die lineare Unabhängigkeit der Zeilen von X'.

$$\Rightarrow \mathrm{Zr}(X) = \mathrm{Zr}(X')$$

3.2.1.0.5 Bedeutung des Hilfssatzes: In einer Matrix können linear abhängige *Spalten* weggelassen werden, ohne das sich Zeilen- *und* Spaltenrang ändert. (Analog für Zeilen)

Beweis von (3.2.1.4)*:*

i) Wir lassen in Matrix A alle Spalten weg, welche aus den anderen linear kombinierbar sind.

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix}, \quad k \leq n$$

Nach dem Hilfssatz ergibt sich:

$$\mathrm{Sr}(A) = \mathrm{Sr}(A') = k, \qquad \mathrm{Zr}(A) = \mathrm{Zr}(A')$$

$$A' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_m \end{pmatrix}, \quad z'_i \in \mathbb{K}^k$$

ii) Wir lassen in A' alle Zeilen weg, welche aus den anderen linear kombinierbar sind.

$$\Rightarrow A'' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_l \end{pmatrix}, \quad l \leq m$$

Nach dem Hilfssatz ergibt sich:

$$\mathrm{Sr}(A'') = \mathrm{Sr}(A') = \mathrm{Sr}(A) = k, \qquad \mathrm{Zr}(A'') = \mathrm{Zr}(A') = \mathrm{Zr}(A) = l$$

$$A'' = \begin{pmatrix} s'_1 & \dots & s'_k \end{pmatrix}, \quad s'_j \in \mathbb{K}^l$$

iii) $A'' \in \mathbb{K}^{l \times k}$, $l = \dim \operatorname{lin}\left(z'_1, \quad \dots \quad , z'_l\right) \leq k$

$$k = \dim \operatorname{lin}\left(s'_1, \quad \dots \quad , s'_k\right) \leq l$$

$$\Rightarrow k = l$$

3.2.1.0.6 Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 8 \\ -9 & 0 \\ 184 & -7 \end{pmatrix}$$

Rang$(A) = \mathrm{Sr}(A) = 2$, weil die Spalten von A linear unabhängig sind.

3.2.2 Elementare Umformungen von Matrizen

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{K}^{m\times m} \qquad A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

i) Vertauschung zweier Zeilen von A

ii) Multiplikation einer Zeile von A mit $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$

iii) Addition des Vielfachen einer Zeile von A zu einer anderen Zeile

(Analog für Spalten)

3.2.2.0.1 Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 70 & 190 & 660 \\ 7 & 20 & 66 \\ -14 & -10 & -99 \end{pmatrix} \xrightarrow{2)} \begin{pmatrix} 70 & 190 & 660 \\ 70 & 200 & 660 \\ -14 & -10 & -99 \end{pmatrix} \xrightarrow{3)} \begin{pmatrix} 70 & 190 & 660 \\ 0 & 10 & 0 \\ -14 & -10 & -99 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3)} \begin{pmatrix} 0 & 140 & 165 \\ 0 & 10 & 0 \\ -14 & -10 & -99 \end{pmatrix} \xrightarrow{3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 165 \\ 0 & 10 & 0 \\ -14 & -10 & -99 \end{pmatrix} \xrightarrow{2),3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.2.0.2 Eigenschaft: Bei elementaren Umformungen ändert sich der Rang der Matrix nicht, weil die lineare Hülle der Zeilen $z_1, \dots, z_m$ bei elementaren Umformungen nicht verändert wird. Damit bleibt auch ihre Dimension, also $\mathrm{Zr}(A) = \mathrm{Rang}(A)$, unverändert.

3.2.2.0.3 Anwendung: Umformung von A durch elementare Umformungen so lange, bis eine Matrix einfacher Strukur entsteht, bei der man den Rang ablesen kann. Eine solche einfache Struktur liegt vor bei

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & * & * & * & * & * \\ 0 & s_{22} & * & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & s_{rr} & * & * \\ & & & 0 & & \end{pmatrix} \qquad (* - \text{nicht interessierende Einträge})$$

(*Trapezgestalt, Zeilenstufenform*)

3.2.2.1 Behauptungen

i) Ist $S \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und sind die *Hauptdiagonalelemente* $s_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \dots, r$, so ist $\mathrm{Rang}(S) = r$.

   Beweis:

Die ersten r Zeilen $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{K}^n$ von S sind linear unabhängig, denn sei

$$s_i = (0, \ldots, 0, s_{ii}, s_{i,i+1}, \ldots, s_{in})$$

und

$$\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \ldots + \lambda_r s_r = 0$$

Dann ist

$$\lambda_1 s_{11} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 s_{22} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$\Rightarrow$ Zeilenrang von S ist r.

ii) Jede Matrix lässt sich durch elementare Umformungen in Trapezform bringen, wobei der Rang erhalten bleibt.

Beweis: (konstruktiv[I])

a) Habe A obige Gestalt. $B = (a_{ij})_{\substack{i = k+1, \ldots, m \\ j = k+1, \ldots, n}} \in \mathbb{K}^{(m-k)\times(n-k)}$

1. Fall: Ist $B = 0$, so hat A bereits Trapezform.
2. Fall: Ist $B \neq 0$, so gibt es $a_{ij} \neq 0$ mit $i \in \{k+1, \ldots, m\}, j \in \{k+1, \ldots, n\}$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & \star & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \star \\ 0 & \cdots & a_{kk} & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right)$$

Durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen (Typ 1) lässt sich Matrix A' erzeugen, wobei die ersten k Spalten unverändert bleiben.
$a'_{k+1,k+1} \neq 0$ heißt *Pivotelement*

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & \cdots & \star & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \star \\ 0 & \cdots & a_{kk} & & \\ \hline & & & a'_{k+1,k+1} & \\ & 0 & & \vdots & B' \\ & & & a'_{m,k+1} & \end{array}\right) \qquad \text{mit } a'_{k+1,k+1} \neq 0$$

[I] Angabe eines Verfahrens mit dem man jede Matrix in Trapezform bringen kann.

Durch Zeilenumformungen vom Typ 3), und zwar Addition des $-\frac{a'_{i,k+1}}{a'_{k+1,k+1}}$-fachen des $(k+1)$-ten der Zeilen zur i-ten Zeile entsteht A'' für $i = k+2, \dots, m$.

$$A'' = \left(\begin{array}{ccc|c|c}
a_{11} & \cdots & \star & \multicolumn{2}{c}{} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \multicolumn{2}{c}{\star} \\
0 & \cdots & a_{kk} & \multicolumn{2}{c}{} \\
\hline
 & & & a'_{k+1,k+1} & \star \\
\cline{4-5}
 & 0 & & \vdots & \\
 & & & 0 & B''
\end{array}\right)$$

$\mathrm{Rang}(A'') = \mathrm{Rang}(A)$

b) *Gaußscher Algorithmus zur Rangbestimmung*

1. Schritt: $k = 0$, d.h. an A werden keinerlei Bedinungen gestellt.
2. Schritt: Suche Pivotelement $a'_{k+1,k+1} \neq 0$ (günstig: $|a'_{k+1,k+1}| = 1$)
3. Schritt: Transformiere A' in A'' gemäß Teil 2a).
4. Schritt: Ist $B'' = 0$ oder $k+1 = \min\{m, n\}$, so $\mathrm{Rang}(A) = k+1$. Andernfalls erhöhe k um 1 und gehe zu 2. Schritt zurück.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 5 & 3.5 & 6.5 & 11.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & -1.5 & -3.5 & 1.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{Rang}(A) = 2$

3.3 Lineare Gleichungssysteme

3.3.1 Definitionen

Ein *lineares Gleichungssystem* in den *Unbekannten* $x_1, \dots, x_n$ besteht aus m Gleichungen der Form:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & \\
a_{mn}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, \dots, m \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \quad (\textit{Koeffizientenmatrix}), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_m \quad (\textit{Absolutglied(vektor)})$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_n$$

Das Gleichungssystem heißt *homogen*, falls $b = 0$, andernfalls *inhomogen*.

Die Menge aller Lösungen $x \in \mathbb{K}_n$ des Gleichungssystems $Ax = b$ sei

$$L(A, b) := \{x \in \mathbb{K}_n \mid Ax = b\}$$

und heißt *Lösungsraum* (oder *Lösungsmenge*) des Gleichungssystems.

3.3.1.0.1 Fragen:

i) Gibt es Lösungen?

ii) Wieviele Lösungen gibt es?

iii) Konstruktion der Lösungen

3.3.2 Struktur der Lösungsräume

a) $L(A, 0) \neq \emptyset$, weil $A \cdot 0 = 0$, also $0 \in L(A, 0)$.

b) $L(A, 0)$ ist Unterraum von $\mathbb{K}_n$, denn es gilt a) und weiterhin gilt:
Mit $x, y \in L(A, 0)$, so folgt $A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$, d.h. $x + y \in L(A, 0)$; außerdem $A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda{\cdot}0 = 0$, d.h. $\lambda x \in L(A, 0)$. Somit ist Unterraum-Kriterium erfüllt.

c) Wenn das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist, so besitzt jedes $x \in L(A, b)$ die Darstellung

$$x = x_s + x_h \quad \text{mit einem (speziellen) } x_s \in L(A, b) \text{ und } x_h \in L(A, 0).$$

Symbolisch:

$$L(A, b) = x_s + L(A, 0)$$

$L(A, b)$ bildet dann einen *affinen Unterraum* ("Punkt + linearer Unterraum") des $\mathbb{K}_n$.

in Worten: Die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystem erhält man durch Addition einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystem zur allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystem.

Beweis:

i) Sei $x \in L(A, b)$.

$$A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$$

$$\Rightarrow \quad x - x_0 \in L(A, 0), x \in x_0 + L(A, 0) \quad \Rightarrow \quad L(A, b) \subseteq x_0 + L(A, 0)$$

ii) Für beliebiges $y \in x_0 + L(A, 0)$ gilt:

$$y = x_0 + x, x \in L(A, 0)$$

$$\Rightarrow \quad Ay = A(x_0 + x) = Ax_0 + Ax \quad \Rightarrow \quad Ay = b + 0 = b \quad \Rightarrow \quad y \in L(A, b)$$

$$\Rightarrow \quad x_0 + L(A, 0 \subseteq L(A, b)$$

3.3.2.0.1 Beispiel:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & -1.5 \\ & 2x_2 & +6x_3 & = & 0 \end{array}$$

1) Allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ & 2x_2 & +6x_3 & = & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow x_2 = -3x_3 \Rightarrow x_1 = 3x_2$$

$$L(A, 0) = \{x \in \mathbb{K}_3 \mid x_1 = 3x_3, x_2 = -3x_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{K} \right\}$$

$$L(A, 0) = \mathrm{lin} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2) Spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystem

$$L\left(A, \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{lin} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

d.h. $x \in \mathbb{K}_3$ ist Lösung $\Leftrightarrow$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 + 3\lambda \\ 0 - 3\lambda \\ 0 + 1\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

3.3.3 Lösbarkeitskriterium

Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A|b)$.
$(A|b)$ heißt *erweiterte Koeffizientenmatrix.*

Beweis:

Sei $A = (s_1, \ldots, s_n), s_j \in \mathbb{K}_n$, dann ist $\operatorname{Rang} A = \dim \operatorname{lin}(s_1, \ldots, s_n)$.

$$\operatorname{Rang}(A|b) = \dim \operatorname{lin}(s_1, \ldots, s_n, b)$$

$$\begin{aligned} x \in L(A, b) \Leftrightarrow Ax = b \Leftrightarrow b = \sum_{j=1}^{n} x_j s_j &\Leftrightarrow b \in \operatorname{lin}(s_1, \ldots, s_n) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{lin}(s_1, \ldots, s_n) = \operatorname{lin}(s_1, \ldots, s_n, b) \Leftrightarrow \operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang}(A|b) \end{aligned}$$

In unserem Beispiel:

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 2 = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1.5 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{Gleichungssystem lösbar}$$

aber:

$$\begin{array}{cccrr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & -1.5 \\ & +2x_2 & +6x_3 & = & 0 \\ x_1 & & -3x_3 & = & 0.5 \end{array}$$

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} = 2$$

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -1.5 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \\ 1 & 0 & -3 & | & 0.5 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -1.5 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \\ 0 & -2 & -6 & | & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -1.5 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$\Rightarrow$ Gleichungssystem ist unlösbar

3.3.4 Dimension des Lösungsraumes

$$\dim(L(A, 0)) = n - \operatorname{Rang} A \quad (= \textit{Rangdefekt} \text{ von } A)$$

denn mit $f_A : \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_m$ (definiert durch $f_A(x) = Ax$) gilt:

$$\operatorname{Rang}(A) = \dim(\operatorname{Bild}(f_A))$$

und

$$L(A, 0) = \{x \in \mathbb{K}_n \mid f_A(x) = 0\} = \operatorname{Kern}(f_A)$$

Nach Dimensionsformel für lineare Abbildungen:

$$n = \dim \mathbb{K}_n = \dim(\operatorname{Kern}(f_A)) + \dim(\operatorname{Bild}(f_A))$$

3.3.4.0.1 Folgerungen:

a) Gleichungssystem $Ax = b$ ist für *alle* $b \in \mathbb{K}_m$ lösbar

$$\Leftrightarrow \operatorname{Rang} A = m \quad (= \text{Anzahl der Gleichungen})$$

Beweis: Für beliebiges $b \in \mathbb{K}_m$ gilt:

$$\begin{aligned} Ax = b \text{ lösbar } &\Leftrightarrow \operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang}(A|b) \\ &\Leftrightarrow \dim \operatorname{lin}(s_1, \dots, s_n) = \dim \operatorname{lin}(s_1, \dots, s_n, b) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{lin}(s_1, \dots, s_n) = \operatorname{lin}(s_1, \dots, s_n, b) = \mathbb{K}_m \Leftrightarrow \operatorname{Rang} A = m \end{aligned}$$

b) Unter der Voraussetzung, dass $Ax = b$ lösbar ist, gilt:
Lösung ist eindeutig $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} A = n$ ($=$ Anzahl der Unbekannten)
Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Lösung von } Ax = f_A(x) = b \text{ eindeutig } &\Leftrightarrow f_A \text{ injektiv} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Kern}(f_A) = \{0\} \Leftrightarrow \dim L(A, 0) = 0 \Leftrightarrow n = \operatorname{Rang} A \end{aligned}$$

In unserem Beispiel:

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 2$$

so Gleichungssystem für alle Vektoren $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ lösbar, aber nicht eindeutig,
weil $\operatorname{Rang}(\dots) < 3$.

3.3.5 Gaußscher Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme

1. Schritt: Ordne $Ax = b$ das rechteckige Schema $(A|b)$ zu und führe *elementare Zeilenumformungen* gemäß Gaußschem Algorithmus durch.

   Dabei ändert sich $L(A, b)$ nicht.

2. Schritt: Sind alle $a_{i,k+1} = 0$ für $i = k+1, \dots, m$, so müssen die letzten $n - k$ Spalten von A getauscht werden, um ein Pivotelement $a'_{k+1,k+1} \neq 0$ zu finden.

   Achtung! Spaltenvertauschung entspricht Vertauschung der Reihenfolge der Unbekannten $x_1, \dots, x_n$, was registriert werden muss!

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c|c} a_{11} & \cdots & \star & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \star & \\ 0 & \cdots & a_{kk} & & b' \\ \hline & & & & \\ & 0 & & B & \\ & & & & \end{array} \right)$$

Falls $B \neq 0$, gehe zu 1. Schritt.

3. Schritt: Verfahren endet mit Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c|c} D & M & \\ \hline 0 & 0 & b'' \end{array}\right) \tag{3.3.5.7}$$

wobei

$$D = \begin{pmatrix} a'_{11} & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & a'_{rr} \end{pmatrix}, \quad a'_{ii} \neq 0 \text{ für } i = 1, \dots r \ ,$$

$$D \in \mathbb{K}^{r\times r} \ (\textit{obere Dreiecksmatrix}), \ \ M = (m_{ij}) \in \mathbb{K}^{r\times(n-r)}$$

Lösbarkeitstest: Ist $b''_{r+1} = \ldots = b''_m = 0$, so ist $r = \operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A|b)$ und Gleichungssystem lösbar, andernfalls unlösbar.

4. Schritt: Interpretiere das Schema (3.3.5.7) als Gleichungssystem in den Unbekannten

$$y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_n$$

welche aus $x_1, \ldots, x_n$ durch die entsprechenden Vertauschungen hervorgehen.

$$Dy + Mz = b''$$

Setze $z_j = \lambda_j, j = r+1, \ldots, n, \lambda_j \in \mathbb{K}$ (*freie Parameter*) und bestimme $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$ als Lösung des Gleichungssystem

$$Dy = b'' - M\lambda$$

und zwar durch *Rückwärtseinsetzen* (Rückwärtssubstitution) beginnend mit der letzten Zeile.

$$y_r = \frac{1}{a'_{rr}}\left(b''_r - \sum_{j=r+1}^{m} m_{rj}\lambda_j\right)$$

Einsetzen von y_r in $(r-1)$-te Zeile liefert y_{r-1} gemäß

$$a'_{r-1,r-1}y_{r-1} + a'_{r-1,r}y_r = b''_{r-1} - \sum_{j=r+1}^{m} m_{r-1,j}\lambda_j$$

also $\quad y_{r-1} = \dfrac{1}{a'_{(r-1),(r-1)}}\left(b''_{r-1} - \displaystyle\sum_{j=r+1}^{m} m_{r-1,j}\lambda_j - \frac{a'_{r-1,r}}{a'_{r,r}}\left(b''_r - \sum_{j=r+1}^{m} m_{rj}\lambda_j\right)\right)$

usw. bis $y_1 = \ldots$.

3.3.5.0.1 Bemerkung: Durch Umnummerierung der Variablen lässt sich Lösung des Gleichungssystems schreiben als

$$x = x_s + \lambda_{r+1} v_1 + \lambda_{r+2} v_2 + \cdots \lambda_n v_{n-r},$$

wobei x_s eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ist und $v_1, v_2, \ldots v_{n-r}$ eine Basis von $L(A,0)$ bilden.

3.3.5.0.2 Beispiel: Bestimmung der reellen Lösung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_5)^T$ des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrcr}
x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 2 \\
-x_1 & -2x_2 & -2x_3 & +2x_4 & +x_5 & = & 3 \\
2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & -x_4 & & = & -1 \\
x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|r}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
-1 & -2 & -2 & 2 & 1 & 3 \\
2 & 4 & 3 & -1 & 0 & -1 \\
1 & 2 & 2 & -2 & 1 & 2
\end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 5 \\
0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -5 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{rrrrr|r}
x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & x_5 & \\
1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & -3 & -2 & -5 \\
0 & 1 & 0 & -3 & -2 & -5 \\
0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & -3 & -2 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{rrrrr|r}
x_1 & x_3 & x_5 & x_4 & x_2 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
0 & 1 & -2 & -3 & 0 & -5 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrcr}
x_1 & +x_3 & +x_5 & +x_4 & +2x_2 & = & 2 \\
 & +x_3 & -2x_5 & -3x_4 & & = & -5 \\
 & & +2x_5 & & & = & 5
\end{array}$$

Setze $x_4 = \lambda, x_2 = \mu$. Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich

$$x_5 = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = -5 + 2\frac{5}{2} + 3\lambda = 3\lambda$$

$$x_1 = 2 - 3\lambda - \frac{5}{2} - \lambda - 2\mu = -\frac{1}{2} - 4\lambda - 2\mu$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

3.3.5.0.3 Anwendung: Berechnung der inversen Matrix $A^{-1} =: S = (s_{ij}) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ einer regulären Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$\begin{aligned} AA^{-1} = AS = E_n \quad &\Leftrightarrow \quad (As_1, \dots, As_n) = (e_1^T, \dots, e_n^T) \\ &\Leftrightarrow \quad As_j = e_j \text{ für jedes } j \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

d.h., man muss das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit verschiedenen rechten Seiten $b = e_1^T, \dots, b = e_n^T$ lösen. Das kann mittels Gaußschem Algorithmus erfolgen, und zwar *simultan* beginnend mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $Ax = E_n$.

3.4 Determinanten

Die Theorie des Determinanten ist ältester Teil der linearen Algebra. Heute: Wichtiges Unterschuchungsmittel für Matrizen; große Bedeutung auch bei anderen mathematischen Fragestellungen.

3.4.0.0.1 Zur Erinnerung:

- Permutation π ist bijektive Abbildung: $\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$
- Menge aller Permutationen bildet Gruppe S_n
- $\mathrm{sig}(\pi) = (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände in } \pi}$

3.4.1 Definition einer Determinante (nach G.W. Leibniz [II])

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, d.h. eine quadratische Matrix. Dann heißt

$$\mathrm{Det}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in S_n}^{(n! \text{ Summanden})} \mathrm{sig}(\pi) a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\pi(n)} \tag{3.4.1.8}$$

die *Determinante* von A.

[II](1646-1716)

3.4.1.0.1 Beispiele:

i) Determinante einer 2-reihigen Matrix

$$S_2 : \underset{\text{(gerade)}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}, \underset{\text{(ungerade)}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (+1)a_{11}a_{22} + (-1)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ii) Determinante einer 3-reihigen Matrix

$$S_3 : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{(gerade)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{(ungerade)}}$$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

(*Regel von Sarrus*[III])

iii)

$$\operatorname{Det} E_n = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sig}(\pi) \underbrace{\delta_{1,\pi(1)}\delta_{2,\pi(2)} \dots \delta_{n,\pi(n)}}_{\neq 0 \Leftrightarrow \delta_{i,\pi(i)} = 1 \text{ für alle } i=1,\dots,n} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

$$\delta_{i,\pi(i)} = 1 \Leftrightarrow i = \pi(i) \Leftrightarrow \pi = \operatorname{id}_{\mathbb{N}_n}$$
$$\Rightarrow \operatorname{Det} E_n = (+1)\delta_{11}\delta_{22} \dots \delta_{nn} = 1$$

3.4.2 Eigenschaften von Det(A)

1) (Elementare Umformungen vom Typ 2) Homogenität in i-ter Zeile

$$\begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_i \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix}$$

[III] (1798-1858)

2) Additivität in i-ter Zeile

$$\begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a_{i1}' & \dots & a_{in} + a_{in}' \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}' & \dots & a_{in}' \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3) Sind in A zwei Zeilen gleich, etwa $z_k = z_l$ und $k < l$, so ist $\operatorname{Det} A = 0$.
Denn

$$A \underset{(3.4.1.8)}{=} \sum_{\pi \in G_n} \operatorname{sig}(\pi) a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)} + \sum_{\pi \in U_n} \operatorname{sig}(\pi) a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)}$$

da

$$S_n = G_n \cup U_n, G_n \cap U_n = \emptyset$$

$$G_n = \{\pi \in S_n \mid \operatorname{sig}(\pi) = 1\}, \quad U_n = \{\pi \in S_n \mid \operatorname{sig}(\pi) = -1\}$$

Benutze die Transposition

$$\tau : \begin{pmatrix} 1 \dots k \dots l \dots n \\ 1 \dots l \dots k \dots n \end{pmatrix}, \quad \operatorname{sig}(\tau) = -1$$

$$U_n = \{\sigma \circ \tau \mid \sigma \in G_n\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Det} A = \sum_{\pi \in G_n} (+1) a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)} + \sum_{\sigma \in G_n} (-1) a_{1,\sigma(\tau(1))} \dots a_{n,\sigma(\tau(n))}$$

Es ist $a_{1,\sigma(\tau(1))} \dots a_{n,\sigma(\tau(n))} = a_{1,\sigma(1)} \dots \underbrace{a_{k,\sigma(l)}}_{=a_{l,\sigma(l)}} \dots \underbrace{a_{l,\sigma(k)}}_{=a_{k,\sigma(k)}} \dots a_{n,\sigma(n)}$

(weil $a_{k,j} = a_{l,j}$ für alle $j = 1, \dots, n$)

$$\operatorname{Det} A = \sum_{\pi \in G_n} a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)} - \sum_{\sigma \in G_n} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} = 0$$

4) $\operatorname{Det}(A) = \operatorname{Det}(A^T)$, denn $A^T = (\widetilde{a}_{ij}), \widetilde{a}_{ij} = a_{ji}$

$$\operatorname{Det}(A^T) \underset{(3.4.1.8)}{=} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sig}(\pi) \widetilde{a}_{1,\pi(1)} \dots \widetilde{a}_{n,\pi(n)} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sig}(\pi) a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n}$$

(Setze $\pi(i) = j \quad \Leftrightarrow \quad i = \pi^{-1}(j)$)

$$\operatorname{Det}(A^T) = \sum_{\pi \in S_n} \underbrace{\operatorname{sig}(\pi)}_{=\operatorname{sig}(\pi^{-1})} a_{1,\pi^{-1}(1)} \dots a_{1,\pi^{-1}(n)}$$

(Setze $\pi^{-1} = \sigma$)

$$\Rightarrow \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} \underset{(3.4.1.8)}{=} \operatorname{Det} A$$

3.4.2.1 Folgerungen

a) Hat A eine Nullzeile, so ist $\operatorname{Det} A = 0$

(siehe Eigenschaft 1)

b) $\operatorname{Det}(\lambda A) = \lambda^n \operatorname{Det} A$

(Anwendung von Eigenschaft 1) nacheinander für die Zeilen $z_1, \ldots, z_n$ von A)

c) (Elementare Umformungen vom Typ 1)

Vertauscht man in A zwei Zeilen, so ändert sich das Vorzeichen von $\operatorname{Det}(A)$, genauer:

$$\begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix}, \quad k < l \ ,$$

denn bilde

$$B = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k + z_l \\ \vdots \\ z_k + z_l \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

so ist $\operatorname{Det} B \underset{3)}{=} 0$

$$0 = \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k + z_l \\ \vdots \\ z_k + z_l \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} \underset{2)}{=} \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_k + z_l \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_k + z_l \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} \underset{2)}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix}}_{=0 \text{ (s. 3)}} + \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix}}_{=0 \text{ (s. 3)}}$$

d) (Elementare Umformungen vom Typ 3)

Bei Addition des Vielfachen einer Zeile von A zu einer anderen Zeile ändert sich $\operatorname{Det} A$ nicht, d.h.

$$\begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_l + \lambda z_k \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix}$$

denn

$$\begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_l + \lambda z_k \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} \underset{2)}{=} \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ \lambda z_k \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} = \operatorname{Det} A + \lambda \underbrace{\begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix}}_{=0 \text{ (s. 3)}}$$

e) Gleiche Rechenregeln für Determinante gelten auch bei Spalten (wegen Eigenschaft 4).

f) Man kann Gaußschen Algorithmus anwenden, um eine Matrix einfacher Struktur zu erhalten, deren Determinante leicht zu berechnen ist.

3.4.2.1.1 Determinante einer oberen Dreiecksmatrix: Sei $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ der Gestalt

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

so ist

$$\operatorname{Det} D = d_{11} d_{22} \dots d_{nn} = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$$

Beweis:

In (3.4.1.8) leisten nur solche Summanden

$$\operatorname{sig}(\pi) d_{1,\pi(1)} \dots d_{n,\pi(n)}$$

einen Beitrag, für die $d_{i,\pi(i)} \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Für $\pi \in S_n, \pi \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}_n}$ gibt es $i \in \{1, \dots, n\} =: \mathbb{N}_n$ mit der Eigenschaft $\pi(i) < i$.

$$\Rightarrow d_{i,\pi(i)} = 0$$

$$\mathrm{Det}\, D \underset{(3.4.1.8)}{=} \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sig}(\pi) d_{1,\pi(1)} \dots d_{n,\pi(n)} = \underbrace{\mathrm{sig}(\mathrm{id}_{\mathbb{N}_n})}_{=1} d_{11} \dots d_{nn} + 0$$

3.4.2.1.2 Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & -11 \\ 0 & 0 & 14 & -9 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= 11 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 11 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 5 = -110$$

3.4.2.1.3 Bemerkung: Det A ist wegen der Linearität in *jeder* ihrer n Zeilen (s. Eigenschaften 1, 2) eine *Multilinearform* (oder n-*Form*) auf $\mathbb{K}_n$ und wegen c) *alternierend.*

3.4.3 Multiplikationssatz

Für $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $B = (b_{ij})$ gilt

$$\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}\, A \cdot \mathrm{Det}\, B$$

Beweis:

Setze $C := AB = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $c_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det} C &= \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} b_j \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix} \underset{2)}{=} \sum_{j=1}^n a_{1j} \begin{vmatrix} b_j \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix} \underset{2)}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{1j} a_{2k} \begin{vmatrix} b_j \\ b_k \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix} \\
&= \cdots \\
&= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \begin{vmatrix} b_{j_1} \\ b_{j_2} \\ \vdots \\ b_{j_n} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in S_n} a_{1,\pi(1)} \ldots a_{n,\pi(n)} \begin{vmatrix} b_{\pi(1)} \\ \vdots \\ b_{\pi(n)} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

weil jeder Summand verschwindet, in der zwei Zeilen gleich sind (nach Rechenregel 3). Durch Vertauschen der Zeilen erhält man $\begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix}$. Dabei ändert sich Vorzeichen der Determinante genau so oft, wie es Fehlstände in π gibt.

$$\operatorname{Det} D = \sum_{\pi \in S_n} a_{1,\pi(1)} \ldots a_{n,\pi(n)} \operatorname{sig}(\pi) \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix}}_{\operatorname{Det} B} \underset{(3.4.1.8)}{=} \operatorname{Det} A \cdot \operatorname{Det} B$$

3.4.3.0.1 Determinante einer regulären (invertierbaren) Matrix: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann sind folgende 3 Aussagen äquivalent:

$$\text{a) } A \text{ ist invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{b) } \operatorname{Rang} A = n \quad \Leftrightarrow \quad \text{c) } \operatorname{Det} A \neq 0$$

Beweis:

i) a) $\Leftrightarrow f_A : \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_n$ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow \underbrace{\dim \operatorname{Bild}(f_A)}_{=\operatorname{Rang} A} = \dim \mathbb{K}_n = n \Leftrightarrow$ b)

ii) Aus a) folgt: Es gibt $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $A^{-1}A = E_n$. Mit Multiplikationssatz ergibt sich

$$\operatorname{Det}(A^{-1}) \cdot \operatorname{Det} A = \operatorname{Det}(A^{-1}A) = \operatorname{Det} E_n = 1$$

$\Rightarrow \operatorname{Det} A \neq 0$, d.h. c)

iii) Sei $\operatorname{Rang} A < n$, so sind die Zeilen $z_1, \ldots, z_n$ von A linear abhängig. O.B.d.A. sei $z_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i z_i$. Dann ist

$$\operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i z_i \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_i \end{vmatrix} \underset{3)}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot 0 = 0$$

also c) $\Rightarrow$ b).

3.4.3.0.2 Ergänzung: Aus ii) folgt:

$$\operatorname{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{Det} A}$$

3.4.4 Adjungierte Matrix

3.4.4.0.1 Definition: Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so bezeichnet man mit $A_{kl} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ diejenige Matrix, welche durch Streichen der k-ten Zeile und l-ten Spalte aus A entsteht.

$$A_{kl} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \cancel{a_{1l}} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cancel{a_{k1}} & \ldots & \cancel{a_{kl}} & \ldots & \cancel{a_{kn}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \cancel{a_{nl}} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad k, l \in \{1, \ldots, n\}$$

Dann gilt der

3.4.4.1 Laplacesche Entwicklungssatz (Laplace 1749-1827)

- *Entwicklung nach k-ter Zeile*

$$\operatorname{Det} A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \operatorname{Det}(A_{kj})$$

- *Entwicklung nach l-ter Spalte*

$$\operatorname{Det} A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} \operatorname{Det}(A_{il})$$

Beweis: (s. Fischer/Kaul 1, S. 332 ff.)

3.4.4.1.1 Anwendung: Für $n \geq 4$ kann man diese Formeln zur rekursiven Berechnung von Det A benutzen, insbesondere dann, wenn in einer Zeile oder Spalte von A viele Nullen auftreten.

3.4.4.1.2 Beispiel:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 0 + (-1)^{3+2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{4+3} \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -2 \left((-1)^{1+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \right) \\
&\quad - 3 \left((-1)^{2+1} \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) \\
&= -2\,(-(2 \cdot 5 - (-1) \cdot 2) + (2 \cdot 5 - (-2) \cdot 2)) \\
&\quad - 3\,(-4 \cdot ((-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-2)) - (2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2)) \\
&= 14
\end{aligned}$$

3.4.4.2 Definition der adjungierten Matrix

Die zu A *adjungierte Matrix* (auch *Adjunktenmatrix*) ist

$$\operatorname{Adj}(A) = (\widehat{a}_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \quad \text{mit} \quad \widehat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \operatorname{Det}(A_{ji}) \ .$$

3.4.4.2.1 Satz:

$$A \cdot \operatorname{Adj}(A) = \operatorname{Det}(A) \cdot E_n$$

Beweis:

$$A \cdot \operatorname{Adj}(A) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \widehat{a}_{jl} \right)_{k,l=1,\ldots,n} = \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{kj} (-1)^{j+l} \cdot \operatorname{Det}(A_{lj})}_{=: c_{kl}} \right)$$

$$\Rightarrow c_{kl} = \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} \quad (l\text{-te Zeile})\ , \qquad z_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$$

$$c_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \quad \text{(da 2 Zeilen gleich)} \\ \operatorname{Det} A & \text{für } k = l \quad \text{(nach Entwicklungssatz)} \end{cases}$$

also

$$c_{kl} = \mathrm{Det}\, A \cdot \delta_{kl}$$

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \mathrm{Det}\, A \cdot (\delta_{kl})_{k,l=1,\ldots,n} = \mathrm{Det}\, A \cdot E_n$$

3.4.4.2.2 Folgerung: Explizite Formel für inverse Matrix, falls A regulär ist:

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}\, A} \cdot \mathrm{Adj}(A) \ .$$

3.4.4.2.3 Anwendung: Im Spezialfall eines quadratischen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit regulärer Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist dessen Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} x = A^{-1}b &= \frac{1}{\mathrm{Det}\, A}\, \mathrm{Adj}(A)\, b \\ \text{d.h.} \quad x_i &= \frac{1}{\mathrm{Det}\, A} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \mathrm{Det}(A_{ji}) b_j \\ &= \frac{1}{\mathrm{Det}\, A}\, \mathrm{Det}\,(s_1, \ldots, s_{i-1}, b, s_{i+1}, \ldots, s_n) \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n \ , \end{aligned}$$

wenn $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{K}_n$ die Spalten von A sind. Diese Formel heißt *Cramersche Regel* (Cramer 1704-1752) und ergibt sich durch Entwicklung der Determinante der Matrix

$$B_i := (s_1, \ldots, s_{i-1}, b, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

nach der i-ten Spalte.

Kapitel 4

Euklidische und unitäre Vektorräume

4.1 Skalarprodukte

4.1.1 Motivation

Beim Studium geometrischer Objekte, wo es um Winkel oder Längen geht, reichen die Daten aus der Theorie der Vektorräume nicht aus. Wir benötigen eine zusätzliche Struktur zur Beschreibung der „metrischen" (oder euklidischen) Geometrie. Diese Struktur ist das *Skalarprodukt*, welches eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf dem Vektorraum V darstellt.

4.1.2 Definition des Skalarprodukts

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (bzw. über $\mathbb{C}$). Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \to \mathbb{R} \quad (\text{bzw.} \to \mathbb{C})$$

$$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

wenn für alle $v, v', w, w' \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$) gilt:

- *Bilinearität*:

$$\begin{aligned} \langle v + v', w \rangle &= \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle \ , \qquad \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \\ \langle v, w + w' \rangle &= \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle \ , \qquad \langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \ \ (\text{bzw.} = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle) \end{aligned}$$

- *Symmetrie*: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
  (bzw. *Hermitizität*: $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

- *Positive Definitheit*:

$$\langle v, v \rangle > 0 \text{ für alle } v \neq 0$$

Ist auf V eine Skalarprodukt definiert, so heißt V *euklidischer Vektorraum* (bzw. *unitärer Vektorraum*).

Bemerkungen:

i) Bei festgehaltener *zweiter* Komponente ist das Skalarprodukt eine lineare Abbildung $V \to \mathbb{K}$ bezüglich der ersten Komponente.

ii) Wegen Symmetrie (bzw. Hermitizität) reicht die Forderung der Linearität bezüglich einer Komponente.

iii) $\langle 0, w\rangle = \langle 0 \cdot v, w\rangle = 0 \cdot \langle v, w\rangle = 0 \quad$ (wegen Homogenität)

Beispiel

Standardskalarprodukt in $V = \mathbb{R}_n$ (bzw. $V = \mathbb{C}_n$):

$$v, w \in \mathbb{R}_n \text{ (bzw. } \in \mathbb{C}_n\text{)}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w\rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v^T w = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\text{(bzw.} \quad \langle v, w\rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i} = v^T \overline{w} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ vdots \\ \overline{w_n} \end{pmatrix})$$

Daneben gibt es noch unendlich viele Möglichkeiten ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}_n$ zu definieren, nämlich

$$(v, w) \mapsto \langle Av, Aw\rangle = (Av)^T Aw = v^T A^T Aw = \sum_{i,j,k=1}^{n} v_i a_{ij} a_{jk} w_k$$

mit einer festen regulären Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ (s.a. Übungsaufgabe).

4.1.3 Definition der zugehörigen Norm

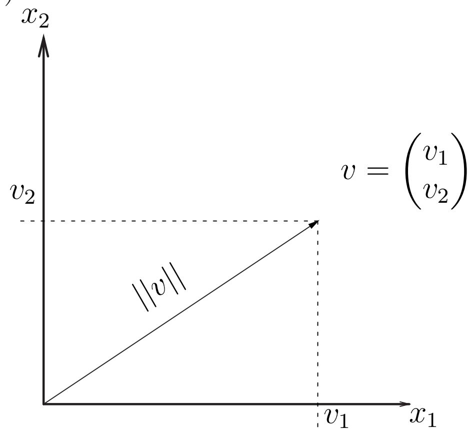
Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot | , \cdot \rangle$, so versteht man unter der *zugehörigen (oder induzierten) Norm* von $v \in V$ die reelle nichtnegative Zahl

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

speziell:
Standardnorm in $V = \mathbb{R}_n$ (bzw. $V = \mathbb{C}_n$):

$$||v|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2} = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \ldots + |v_n|^2}$$

(Beachte: $z\bar{z} = |z|^2$ für $z \in \mathbb{C}$)



(Norm eines Vektors ist Verallgemeinerung der „Länge eines Vektors“ im $\mathbb{R}_2$.)

4.1.4 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung[I]

In jedem Vektorraum V mit Skalarprodukt gilt

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \cdot ||w|| \tag{4.1.4.1}$$

für alle $v, w \in V$.

Beweis:

a) Für $w = 0$ klar.

b) Sei $w \neq 0$. Dann gilt

$$\langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle \geq 0$$

für beliebiges $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\langle v, v\rangle - 2\mathrm{Re}\left(\bar{\lambda}\langle v, w\rangle\right) + |\lambda|^2 \langle w, w\rangle \geq 0$$

Mit $\lambda = \frac{\langle v,w\rangle}{||w||^2}$ folgt

$$||v||^2 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{||w||^2}\langle v, w\rangle\right) + \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{||w||^4}||w||^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad ||v||^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{||w||^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad |\langle v, w\rangle|^2 \leq ||v||^2 ||w||^2$$

[I] (Cauchy 1789-1857, Schwarz 1843-1921)

4.1.5 Folgerungen

1. Eigenschaften der Norm als Abbildung: $V \to \mathbb{R}$

   Positive Definitheit:

   a) $||v|| \geq 0$ für $v \in V$
   b) $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

   Homogenität:

   c) $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$ für $\lambda \in \mathbb{K}, v \in V$, denn

$$||\lambda v||^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda\bar{\lambda} \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 ||v||^2$$

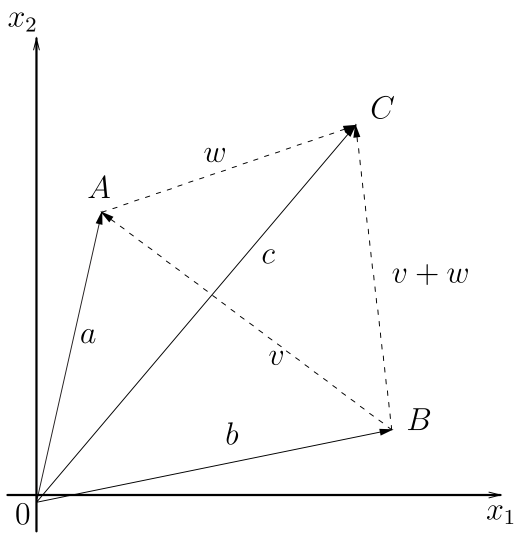
   Dreiecksungleichung:

   d) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ für $v, w \in V$, denn

$$||v+w||^2 = \langle v+w, v+w \rangle = \underbrace{\langle v, v \rangle}_{=||v||^2} + 2 \underbrace{\mathrm{Re}\,(\langle v, w \rangle)}_{\leq |\langle v,w \rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||} + \underbrace{\langle w, w \rangle}_{=||w||^2}$$
$$\leq ||v||^2 + 2||v|| \cdot ||w|| + ||w||^2 = (||v|| + ||w||)^2$$

   Zum Namen „Dreiecksungleichung“:

   Seien A, B, C die Eckpunkte eines Dreiecks, dann $A = 0 + a, B = 0 + b, C = 0 + c$



$$|\overline{AB}| = ||v||, \quad v = a - b$$
$$|\overline{AC}| = ||w||, \quad w = c - a$$
$$|\overline{BC}| = ||w + v|| = ||c - b||$$

Die Dreiecksungleichung besagt

$$|\overline{BC}| = ||v+w|| \leq ||v|| + ||w|| = |\overline{AB}| + |\overline{AC}|$$

2. Für einen *euklidischen* Vektorraum V und $v, w \in V$ mit $v \neq 0, w \neq 0$ kann man den *(Öffnungs-) Winkel* $\alpha = \alpha(v,w)$ zwischen v und w erklären durch

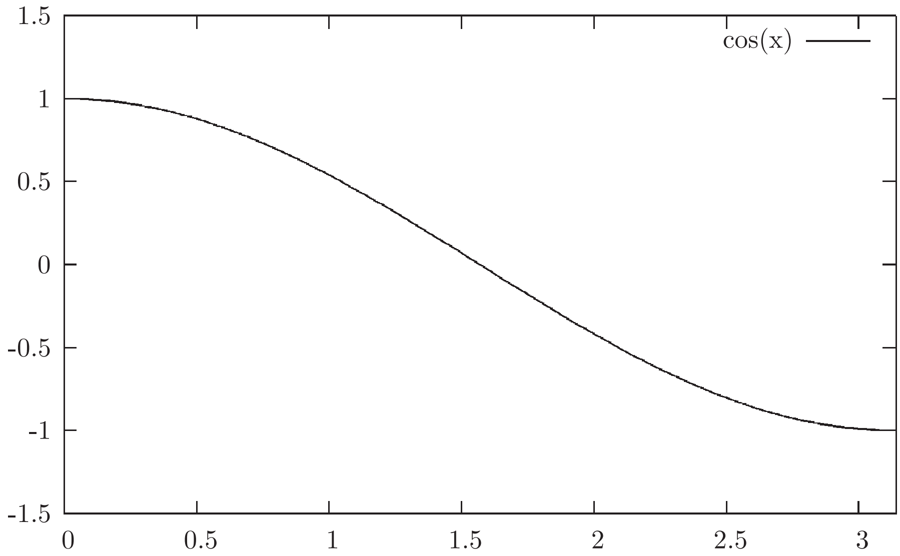
$$\cos\alpha = \frac{\langle v, w\rangle}{||v|| \cdot ||w||} \quad \text{mit} \quad \alpha \in [0, \pi]$$

denn (4.1.4.1) liefert

$$\left|\frac{\langle v, w\rangle}{||v|| \cdot ||w||}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{||v|| \cdot ||w||} \leq 1$$

und cos-Funktion ist bijektive Abbildung

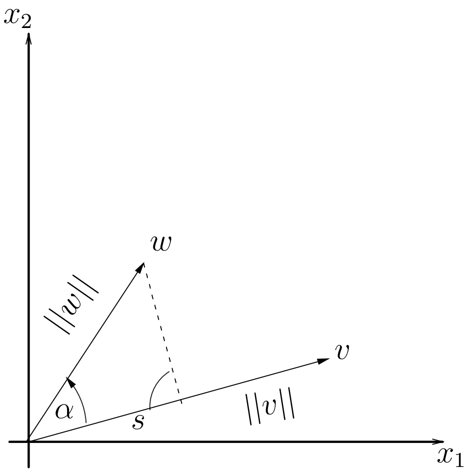
$$[0, \pi] \to [-1, 1]$$



Geometrische Deutung des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}_2$:

$$\langle v, w\rangle = ||v|| \cdot ||w|| \cdot \cos\alpha, \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \cdot \cos\alpha$$



Aus Schulgeometrie:

$$\cos\alpha = \frac{s}{||w||}$$

$$\frac{\langle v, w\rangle}{||v|| \cdot ||w||} = \frac{s}{||w||} \Rightarrow \langle v, w\rangle = s \cdot ||v||$$

4.1.6 Kriterium für lineare Unabhängigkeit in einem Vektorraum mit Skalarprodukt

$v_1, \ldots, v_r \in V$ sind linear unabhängig $\quad\Leftrightarrow\quad G := (\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j=1,\ldots,r} \in \mathbb{K}^{r\times r}$ ist regulär

(G heißt *Gramsche Matrix*, nach J.A. Gram (1850-1916))

Beweis:
Wir zeigen:

$$v_1, \ldots, v_r \text{ linear abhängig } \Leftrightarrow G \text{ nicht regulär } \Leftrightarrow \operatorname{Det} G = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Rang} G < r$$

a) ($\Rightarrow$) Sei $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$ eine nichttriviale Nullrelation, d.h. $\sum_{i=1}^r |\lambda_i|^2 > 0$.

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \langle v_i, v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i, v_j \right\rangle = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, r \tag{4.1.6.2}$$

Das ist nichttriviale Nullrelation der Zeilen von G.

$$z_i = (\langle v_i, v_1\rangle, \langle v_i, v_2\rangle, \ldots, \langle v_i, v_r\rangle)$$

von G, also $z_1, \ldots, z_r$ linear abhängig $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} G < r$.

b) ($\Leftarrow$) Sei $\operatorname{Rang} G < r \Leftrightarrow$ Es gibt Relation (4.1.6.2) mit $\sum_{j=1}^{r} |\lambda_i|^2 > 0$. Setze $w = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$, so gilt

$$\langle w, v_j \rangle = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, r \quad \Rightarrow \quad 0 = \sum_{j=1}^{r} \bar{\lambda}_j \langle w, v_j \rangle = \left\langle w, \underbrace{\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j}_{w} \right\rangle = ||w||^2 \Leftrightarrow w = 0$$

Das ist lineare Abhängigkeit der Vektoren $v_1, \ldots, v_r$.

4.2 Orthogonalität

4.2.1 Definitionen

1. Sei V ein Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann heißen $v, w \in V$ *orthogonal* oder *senkrecht* zueinander (in Zeichen $v \perp w$), falls $\langle v, w \rangle = 0$ (also im Falle eines euklidischen Vektorraums V ist für $v, w \neq 0$ der Winkel $\alpha = \alpha(v, w) = \frac{\pi}{2}$).

2. $v_1, \ldots, v_r \in V$ heißen *orthonormal* oder *Orthonormalsystem*, falls $||v_i|| = 1$ und $v_i \perp v_j = 0$ für $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, r$ (kurz: $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$).

3. Bildet ein Orthonormalsystem $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, dann nennt man es *Orthonormalbasis*.

Beispiel

Bezüglich des Standardskalarprodukts bildet die kanonische Basis $e_1^T, e_2^T, \ldots, e_n^T$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}_n$, denn

$$\left\langle e_i^T, e_j^T \right\rangle = e_i e_j^T = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, \ldots, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \}j\text{-te Stelle} = \delta_{ij}$$

Nach dem Kriterium 4.1.6 ist jedes Orthonormalsystem linear unabhängig, weil die Gramsche Matrix

$$G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,r} = (\delta_{ij}) = E_r \ ,$$

also regulär ist.

4.2.2 Entwicklung nach Orthonormalbasis

Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt für jedes $v \in V$ die *Entwicklungsformel*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle \, v_i, \qquad ||v||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\, \langle v, v_i \rangle \,|^2$$

Beweis:

1) Weil $V = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_n)$, gilt $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ mit $c_i \in \mathbb{K}$.

$$\langle v, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = c_j \cdot 1 \quad \text{für } j = 1, \ldots, n \qquad \Rightarrow c_j = \langle v, v_j \rangle$$

2)

$$\begin{aligned} ||v||^2 = \langle v, v \rangle &\underset{1)}{=} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle \, v_i, \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle \, v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle v, v_i \rangle \, \overline{\langle v, v_j \rangle} \, \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} |\, \langle v, v_i \rangle \,|^2 \end{aligned}$$

4.2.3 Orthogonales Komplement

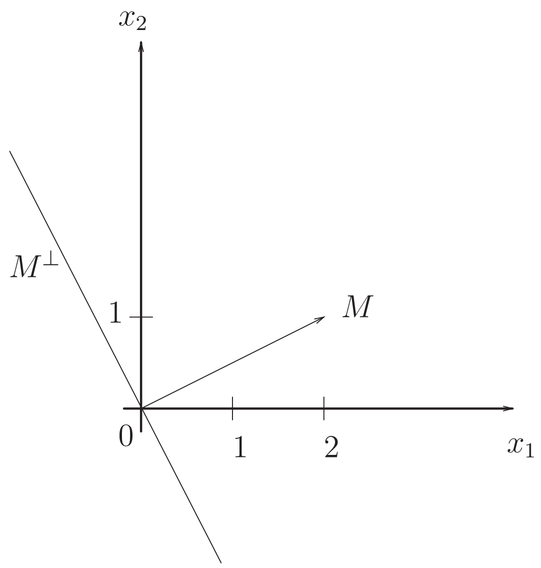
Sei $M \subseteq V, M \neq \emptyset$ und

$$M^\perp := \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in M\}$$

Beispiel

$M = \{(2, 1)\}$

$$\begin{aligned} M^\perp &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 = 0\} = \{(x_1, -2x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{lin}\,((1, -2)) \end{aligned}$$



4.2.4 Eigenschaften von $M^\perp$

a) $M^\perp$ ist stets ein Unterraum von V, denn nach Unterraum-Kriterium überprüfen wir

1. $0 \in M^\perp$, weil $\langle 0, v\rangle = 0$ für alle $v \in V$
2. Sei $v, w \in M^\perp$, dann
$$\langle v + w, u\rangle = \underbrace{\langle v, u\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle w, u\rangle}_{=0} = 0 \quad \text{für } u \in M$$
somit $v + w \in M^\perp$.
3. Sei $v \in M^\perp, \lambda \in \mathbb{R}$, denn
$$\langle \lambda v, u\rangle = \lambda \langle v, u\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda v \in M^\perp$$

b) Sei U ein Unterraum eines endlich dimensionalen Vektorraums V mit Skalarprodukt, dann ist $U^\perp$ ein zu U komplementärer Unterraum, d.h.
$$V = U \oplus U^\perp$$
($U^\perp$ heißt *orthogonales Komplement* zu U.)

Beweis: Wir müssen zeigen

i) $U \cap U^\perp = \{0\}$

ii) $U + U^\perp = V$

zu i) Sei $a \in U \cap U^\perp$, so ist $a \in U^\perp$, also $\langle a, u\rangle = 0$ für alle $u \in U$. Speziell mit $u = a$ folgt
$$0 = \langle a, a\rangle = ||a||^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

zu ii) Sei $\dim U = m$ und $U = \text{lin}(v_1, \ldots, v_m)$ und $\dim V = n > m$. Wir ergänzen $v_1, \ldots, v_m$ zu einer Basis $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ von V. Somit gilt für jedes $v \in V$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

Wir zeigen $\dim U^\perp = n - m$, denn dann folgt nach Dimensionsformel:

$$\begin{aligned}\dim(U + U^\perp) &= \dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap U^\perp) \\ &= m + (n - m) - 0 = n = \dim V \quad \Rightarrow \quad U + U^\perp = V\end{aligned}$$

Zum Nachweis von $\dim U^\perp = n - m$:

$$w = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \in U^\perp \;\Leftrightarrow\; \langle v_i, w\rangle = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m \;(v_i \text{ Basisvektoren von } U)$$

$$\begin{aligned} w \in U^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, v_j\rangle\, x_j = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} \langle v_1, v_1\rangle\, \bar{x}_1 & + & \langle v_1, v_2\rangle\, \bar{x}_2 & + & \ldots & + & \langle v_1, v_n\rangle\, \bar{x}_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ \langle v_m, v_1\rangle\, \bar{x}_1 & + & \langle v_m, v_2\rangle\, \bar{x}_2 & + & \ldots & + & \langle v_m, v_n\rangle\, \bar{x}_n & = & 0 \end{array}\end{aligned}$$

(lineares Gleichungssystem aus m Gleichungen in n Unbekannten $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$)

$$\Rightarrow \dim U^\perp = \dim L(A, 0) = n - \text{Rang}\, A$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = (\langle v_i, v_j\rangle)_{\substack{i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n}}$.

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \ldots & \langle v_m, v_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_m, v_1\rangle & \ldots & \langle v_m, v_m\rangle \end{pmatrix} \text{ ist Gramsche Matrix } G \text{ zu } v_1, \ldots, v_m.$$

Wegen linearer Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_m$ ist G regulär, d.h. $\text{Rang}\, G = m$.

$$\Rightarrow \text{Rang}\, A = m, \quad \dim U^\perp = n - m$$

Ergänzungen:

1. Nach Übungsaufgabe lässt sich jedes $v \in V = U \oplus U^\perp$ *eindeutig* darstellen:

$$v = u + w \quad \text{mit } u \in U\ ,\ \langle w, \widetilde{u}\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad \widetilde{u} \in U$$

2. Hat U eine Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_m$ so ist

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \langle u, u_i \rangle \, u_i}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in U^\perp} \qquad \text{mit } \langle w, u_i \rangle = 0 \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m \; ,$$

denn nach Entwicklungsformel für $u \in U$ gilt $u = \sum_{i=1}^{m} \langle u, u_i \rangle \, u_i$. Weiterhin ist

$$\langle v, u_i \rangle = \langle u + w, u_i \rangle = \langle u, u_i \rangle + \underbrace{\langle w, u_i \rangle}_{=0} = \langle u, u_i \rangle$$

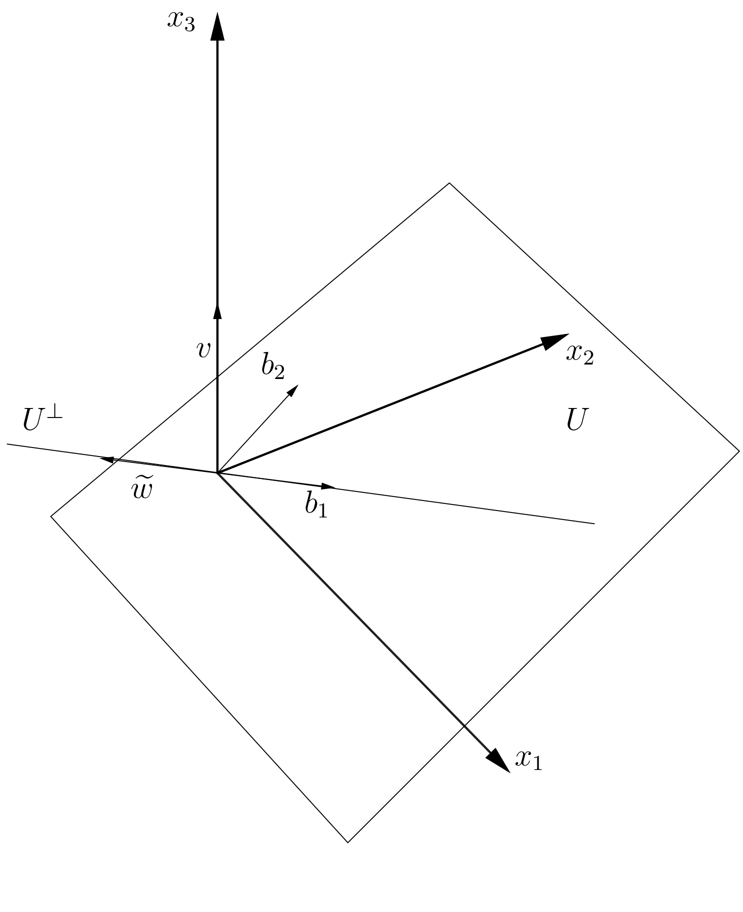
3. Die zur Zerlegung $V = U \oplus U^\perp$ gehörende Projektionsabbildung

$$P = P_U : V \to U \qquad \text{mit } P(u + w) = u \qquad \text{für } u \in U, w \in U^\perp$$

heißt *Orthogonalprojektion* von V auf U, $\operatorname{Kern}(P_U) = U^\perp$.

Beispiel

$$V = \mathbb{R}_3, \; U = \operatorname{lin}(b_1, b_2) \; \text{ mit } b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; \text{ und } v = 2\sqrt{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
U^\perp &= \{w \in \mathbb{R}_3 \mid w^T u = 0 \text{ für alle } u \in U\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 = 0 \\ w_1 \cdot (-1) + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 = 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \middle| w_2 = -w_1, w_3 = 2w_1 \right\} = \operatorname{lin}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\widetilde{w}} \right)
\end{aligned}$$

Weil $\langle b_1, b_2 \rangle = (1,1,0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ist eine Orthonormalbasis von U gegeben durch

$$u_1 := \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 := \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \; u = P_U\left(2\sqrt{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w = v - u = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4.2.5 Konstruktion einer Orthonormalbasis

Konstruktion einer Orthonormalbasis mittels des *Orthonormalisierungsverfahrens* nach Erhard Schmidt (1876-1959). Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass aus jeder Menge

$$B_m := \{v_1, \ldots, v_m\}$$

linear unabhängiger Vektoren des Vektorraums V mit Skalarpordukt stets ein Orthonormalsystem

$$C_m := \{u_1, \ldots, u_m\}$$

konstruiert werden kann. Dabei gilt:

$$\operatorname{lin} B_m = \operatorname{lin} C_m$$

- *Induktionsanfang*

  $m = 1, B_1 = \{v_1\}, v_1 \neq 0$. Setze $u_1 := \frac{1}{||v_1||} v_1$.

- *Induktionsschritt*

  Seien $\overbrace{v_1, \ldots, v_m}^{\in B_m}, v_{m+1} \in V$ linear unabhängig. Nach Induktionsvorraussetzung (IV) erhält man aus B_m ein Orthonormalsystem C_m aus m Vektoren $u_1, \ldots, u_m$ mit $\operatorname{lin} B_m = \operatorname{lin} C_m =: U_m$. Dann $v_{m+1} \notin U_m$.[II]

  1. Schritt: Zerlege v_{m+1} orthogonal bezüglich U_m

  $$v_{m+1} = P_{U_m} v_{m+1} + w_{m+1} \text{ mit } w_{m+1} \in U_m^{\perp}$$

  d.h.

  $$w_{m+1} = v_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \langle v_{m+1}, u_i \rangle \, u_i \quad \Rightarrow \quad w_{m+1} \neq 0 \text{ (wegen } v_{m+1} \notin U_m)$$

  2. Schritt: Normierung von w_{m+1}:

  $$\text{Setze} \qquad u_{m+1} := \frac{1}{||w_{m+1}||} w_{m+1} \ .$$

  Dann ist

  $$\begin{aligned} \operatorname{lin} C_{m+1} &= \operatorname{lin}(u_1, \ldots, u_m, w_{m+1}) = \operatorname{lin}(u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}) \\ &= \operatorname{lin} \underbrace{(u_1, \ldots, u_m)}_{C_m} + \operatorname{lin}(v_{m+1}) \underset{\text{(IV)}}{=} \operatorname{lin} B + \operatorname{lin}(v_{m+1}) \\ &= \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}) \end{aligned}$$

  Weiterhin

  $$\begin{aligned} \langle u_i, u_j \rangle &= \delta_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, \ldots, m \quad \text{(nach IV)}, \\ \langle u_{m+1}, u_j \rangle &= 0 \quad \text{für } j = 1, \ldots, m \text{ , da } u_{m+1} \in U_m^{\perp} \text{ und} \\ \langle u_{m+1}, u_{m+1} \rangle &= \frac{1}{||w_{m+1}||^2} \langle w_{m+1}, w_{m+1} \rangle = 1 \end{aligned}$$

4.2.6 Folgerung

Sei $\dim V = n$. Dann kann aus Basis B_n stets eine Orthonormalbasis C_n konstruiert werden, also:
Jeder endlich-dimensionale euklidische oder unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.

[II] Wäre $v_{m+1} \in U_m$, so wäre v_{m+1} eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_m$.

4.3 Orthogonale und unitäre Matrizen

Wir betrachten jetzt $f_A : \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_n$ (Endomorphismen) mit spezieller Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{K}^{n \times tn}$. Es gilt wieder $f_A(x) = Ax$.

4.3.0.0.1 Definition: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *orthogonal*, falls die Spalten von A ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}_n$ bilden.
Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *unitär*, falls die Spalten von A ein Orthonormalsystem in $\mathbb{C}_n$ bilden.

4.3.1 Charakterisierung orthogonaler (bzw. unitärer) Matrizen

i) A ist orthogonal (bzw. unitär)

$\Leftrightarrow$ ii) f_A erhält das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}_n$ (bzw. $\mathbb{C}_n$)
$(\langle f_A(x), f_A(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad$ für alle $x, y \in \mathbb{K}_n)$

$\Leftrightarrow$ iii) $AA^T = E_n$ (bzw. $A\bar{A}^T = E_n$)

$\Leftrightarrow$ iv) A ist regulär und $A^{-1} = A^T$ (bzw. $A^{-1} = \bar{A}^T$)

$\Leftrightarrow$ v) $A^T A = E_n$ (bzw. $\bar{A}^T A = E_n$)

$\Leftrightarrow$ vi) Zeilen von A bilden Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$)

Beweis: (nur für orthogonale Matrizen, für unitäre Matrizen analog)

iii) $\Leftrightarrow$ iv) $\Leftrightarrow$ v) klar.

ii) $\Leftrightarrow$ i) s. Übungsaufgabe.

i) bedeutet nach Definition: A orthogonal $\Leftrightarrow$ Spalten von $A = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}_n$ $\Leftrightarrow$ $s_i^T s_j = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, n$

iii) lautet:

$$A^T A = \begin{pmatrix} s_1^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{pmatrix} (s_1, \ldots, s_n) = \left(s_i^T s_j\right)_{i,j=1,\ldots,n} = (\delta_{ij}) \quad \Leftrightarrow \quad s_i^T s_j = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \text{i)}$$

v) lautet:

$$E = A^T A = A^T (A^T)^T \underset{\text{wegen iii)}}{\Leftrightarrow} A^T \text{ ist orthogonal}$$
$$\underset{\text{wegen i)}}{\Leftrightarrow} \text{Spalten von } A^T \text{ bilden Orthonormalsystem} \quad \Leftrightarrow \quad \text{vi)}$$

4.3.2 Folgerung

Für orthogonales $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$(\mathrm{Det}\ A)^2 = \mathrm{Det}(A)\cdot\mathrm{Det}(A^T) = \mathrm{Det}(AA^T) \underset{\text{iii)}}{=} \mathrm{Det}\ E_n = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Det}\ A = 1 \text{ oder } \mathrm{Det}\ A = -1$$

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^T = E_n\} \quad (\textit{orthogonale Gruppe} \text{ des } \mathbb{R}^{n\times n}) \\ \mathrm{SO}(n) &:= \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \mathrm{Det}\ A = 1\} \quad (\textit{spezielle orthogonale Gruppe}) \end{aligned}$$

Für unitäres $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt

$$|\mathrm{Det}\ A|^2 = \mathrm{Det}(A)\cdot\overline{\mathrm{Det}(A)} = \mathrm{Det}(A)\cdot\mathrm{Det}(\bar{A}^T) = \mathrm{Det}(A\bar{A}^T) \underset{\text{iii)}}{=} \mathrm{Det}\ E_n = 1$$

$$\Rightarrow \quad |\mathrm{Det}\ A| = 1$$

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A\bar{A}^T = E_n\} \quad (\textit{unitäre Gruppe} \text{ des } \mathbb{C}^{n\times n}) \\ \mathrm{SU}(n) &:= \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \mathrm{Det}\ A = 1\} \quad (\textit{spezielle unitäre Gruppe}) \end{aligned}$$

4.3.2.1 Bemerkung

Sei $A \in \mathrm{O}(2)$, dann hat A mit einem Winkel φ, $0 \le \varphi < 2\pi$, die Gestalt:

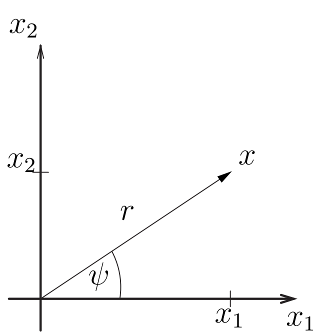
$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =: D(\varphi) \qquad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot D(\varphi)$$

$(A \in \mathrm{SO}(2)$, weil $\mathrm{Det}\ A = 1)$ $\qquad$ $(A \in \mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$, weil $\mathrm{Det}\ A = -1)$

Dabei heißt $D = D(\varphi)$ *Drehmatrix*, denn die Abbildung $f_D : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ definiert durch

$$f_D(x) = D(\varphi)x$$

stellt eine Drehung von $x = \binom{x_1}{x_2}$ um den Winkel φ dar, denn



Polarkoordinaten von x

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = ||x||$$

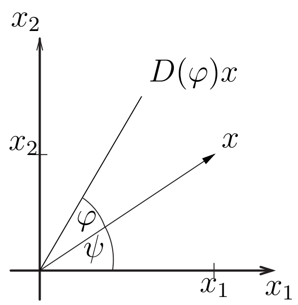
$$\cos\psi = \frac{x_1}{r}$$

$$\sin\psi = \frac{x_2}{r}$$

$$\tan\psi = \frac{x_2}{x_1}$$

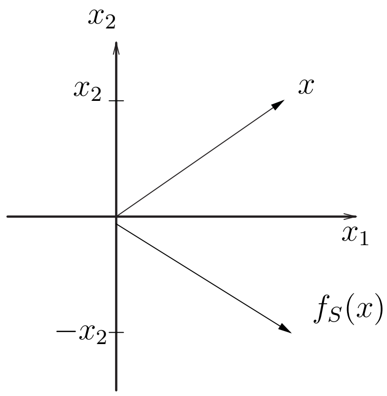
$$D(\varphi)x = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} r \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad D(\varphi)x = r \begin{pmatrix} \cos(\psi+\varphi) \\ \sin(\psi+\varphi) \end{pmatrix} \qquad \text{(nach Additionstheoremen für Winkelfunktionen)}$$



Die Matrix $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2) \backslash \mathrm{SO}(2)$ realisiert eine Spiegelung des $\mathbb{R}_2$ an der x_1-Achse, denn

$$f_S(x) = Sx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$



Somit ist jede orthogonale Abbildung des $\mathbb{R}_2$ eine Drehung um $\binom{0}{0}$ oder die Hintereinanderausführung einer Drehung und einer Spiegelung f_S.

4.4 Eigenwerttheorie

Wir betrachten wieder Endomorphismen f, d.h. lineare Abbildungen $f : V \to V$. Dann ist f durch die Bilder der Vektoren einer Basis $B := \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V eindeutig bestimmt, genauer gesagt, durch die Darstellungsmatrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Diese ist definiert durch:

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$$

Dann ist für $v \in V$ mit $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} v_j$$

4.4.0.0.1 Fragen:

- Gibt es eine Basis B von V, so dass A „möglichst einfach“ aussieht, d.h. wenn A eine Diagonalmatrix
$$\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
ist? Dann heißt f *diagonalisierbar*, und es gilt
$$f(v_i) = \lambda_i v_i$$

- Ist nun jedes $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ diagonalisierbar?

- Wie findet man gegebenenfalls eine solche Basis B?

4.4.0.0.2 Definition: Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\lambda \in \mathbb{C}$) heißt *Eigenwert* von f, falls es einen Vektor $v \in V$ gibt mit
$$f(v) = \lambda v \text{ und } v \neq 0 \ ,$$
v heißt *Eigenvektor* zum Eigenwert λ (zu einem Eigenwert gibt es mehrere Eigenvektoren).

4.4.0.0.3 Bemerkung: $v \neq 0$ ist wichtige Forderung, weil $f(0) = 0 = \alpha \cdot 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.4.1 Folgerungen

1) $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren zu f besitzt.

2)

$$\begin{aligned} v \in V \text{ ist Eigenvektor zu } f \quad &\Leftrightarrow \quad (f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V)(v) = 0 \text{ und } v \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad v \in \mathrm{Kern}(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V) \text{ und } v \neq 0. \end{aligned}$$

$\mathrm{Kern}(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V) =: \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ heißt *Eigenraum* von f zum Eigenwert λ und ist ein Unterraum von V, $\dim \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ heißt *geometrische Vielfachheit* des Eigenwert λ.

3) Betrachten wir wieder Abbildung $f_A : \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_n$ mit $f_A(x) = Ax, A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so übertragen sich diese Begriffe von f_A unmittelbar auf A, insbesondere ist

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda) := \mathrm{Eig}(f_A, \lambda) = \{x \in \mathbb{K}_n \mid (A - \lambda E_n)x = 0\} = L(A - \lambda E_n, 0).$$

4.4.2 Eigenschaften diagonalisierbarer Matrizen

a) $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar, falls es $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}_n$ gibt mit der Eigenschaft: $Av_i = \lambda_i v_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, also

$$A \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n) = \big(v_1, \ldots, v_n\big) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $AT = T\Lambda$ mit $T = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dabei ist T regulär, weil $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.

$\Leftrightarrow$ $T^{-1}AT = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$

b) Für diagonalisierbare Matrizen A gilt:

$$\mathrm{Det}\, A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

denn

$$\underbrace{\mathrm{Det}\, \Lambda}_{=\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n} = \mathrm{Det}(T^{-1}AT) = \mathrm{Det}(T^{-1}) \cdot \mathrm{Det}\, A \cdot \mathrm{Det}\, T = \frac{1}{\mathrm{Det}\, T} \cdot \mathrm{Det}\, A \cdot \mathrm{Det}\, T\ .$$

4.4.2.1 Beispiele

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist diagonalisierbar, denn

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} .$$

Also ist $\binom{1}{1}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Weiterhin ist $\binom{1}{-1}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1.

$$\Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Eig}(A, \pm 1) = \mathrm{Eig}(f_A, \pm 1) = \mathrm{lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}\right)$$

Geometrische Vielfachheit von Eigenwert ± 1 ist $\dim \mathrm{Eig}(A, \pm 1) = 1$.

2.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist *nicht* diagonalisierbar, denn

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h., jeder Eigenvektor ist Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da $\quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, ist 0 einziger Eigenwert zu A.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Eig}(A, 0) = \mathrm{Eig}(f_A, 0) = \mathrm{lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Geometrische Vielfachheit von 0 ist 1.

4.4.3 Das charakteristische Polynom

4.4.3.0.1 Satz:

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ ist Eigenwert zu } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Det}(A - \lambda E_n) = 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ ist Eigenwert} \quad \Leftrightarrow \quad Av = \lambda v \text{ mit } v \neq 0 \quad & \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E_n)v = 0 \\ & \qquad \text{hat nichttriviale Lösung.} \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{Rang}(A - \lambda E_n) < n \\ & \Leftrightarrow \quad A - \lambda E_n \text{ nicht regulär} \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{Det}(A - \lambda E_n) = 0 \end{aligned}$$

4.4.3.0.2 Definition:

$$P(\lambda) = P_A(\lambda) := \mathrm{Det}(A - \lambda E_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

heißt *charakteristisches Polynom* zur Matrix A.

4.4.3.0.3 Folgerung: Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $P_A(\lambda)$.

4.4.3.1 Beispiele

1)

$$P_{E_n}(\lambda) = \mathrm{Det}\left((1-\lambda)E_n\right) = (1-\lambda)^n \cdot \mathrm{Det}\, E_n = (1-\lambda)^n$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 2\cdot 4 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = \lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4+5}, \quad \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

Berechnung der Eigenvektoren von A:

- zu Eigenwert $\lambda_1 = 5$

$$\left.\begin{array}{rrcl} (3-5)x_1 & +4x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & +(1-5)x_2 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2x_2$$

$$\mathrm{Eig}(A, 5) = \mathrm{lin}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- zu Eigenwert $\lambda_2 = -1$

$$\left.\begin{array}{rrcl} (3-(-1))x_1 & +4x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & +(1-(-1))x_2 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_2$$

$$\mathrm{Eig}(A, -1) = \mathrm{lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$\Rightarrow A$ ist diagonalisierbar.

4.4.4 Grundlegendes über Polynome

Seien komplexe Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$ gegeben und

$$P(z) := c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}\ .$$

Dann vermittelt das *komplexe Polynom* P mit den *Koeffizienten* c_j eine Abbildung

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

Ist $c_n \neq 0$, so heisst P ein Polynom vom *Grad* n.

1. *Koeffizientenvergleich*

   Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn sie in ihren Koeffizienten übereinstimmen.

2. *Division durch Linearfaktor*

   Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P vom Grad $n \geq 1$, so

   $$P(z) = (z - z_0)Q(z)$$

   mit eindeutigem Polynom Q vom Grad $n - 1$.

3. *Fundamentalsatz der Algebra*

   Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

4. *Zerlegung in Linearfaktoren*

   $$P(z) = c_n \prod_{k=1}^{r} (z - \lambda_k)^{m_k}$$

   Dabei sind $\lambda_k \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von P und $m_k \in \mathbb{N}$ ihre *Vielfachheiten* mit

   $$m_1 + \ldots + m_r = n\ .$$

4.4.4.0.1 Folgerung: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat n komplexe Nullstellen, jeweils mit ihrer Vielfachheit gezählt.

4.4.4.0.2 Beispiel: Berechnung der Nullstellen von $P(z) = z^3 + z^2 - 2$

1) Eine Nullstelle ist $\lambda_1 = 1$.

2) $P(z) : (z - 1) = (z^3 + z^2 - 2) : (z - 1)$

$$\begin{array}{rrrrl}
(z^3 & +z^2 & & -2) & : (z-1) \;=\; z^2 + 2z + 2 = Q(z) \\
-(z^3 & -z^2) & & & \\
\hline
& 2z^2 & -2 & & \\
& -(2z^2 & -2z) & & \\
\hline
& & 2z & -2 & \\
& & -(2z & -2) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

3) Weitere Nullstellen von P sind die Nullstellen von Q

$$\begin{aligned} Q(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 + 2z + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z = \lambda_{2/3} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

Zerlegung von P in Linearfaktoren:

$$P(z) = 1 \cdot z^3 + z^2 - 2 = 1 \cdot (z-1)(z-(-1+i))(z-(-1-i)) \ .$$

4.4.5 Spezialfall: Symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Alle Eigenwerte von A sind reell, denn

   das charakteristische Polynom $P_A(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda E_n)$ hat nach Fundamentalsatz der Algebra eine Nullstelle $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v \in \mathbb{C}_n$. Dann gilt $v \neq 0$, $Av = \lambda_0 v$ und außerdem $A\overline{v} = \overline{\lambda}_0\overline{v}$.

   $$\Rightarrow \quad (\underbrace{Av}_{=\lambda_0 v})^T\overline{v} = v^T A^T \overline{v} = v^T(A\overline{v}) = v^T\overline{\lambda}_0\overline{v}$$

   $$(\lambda_0 = a_0 + ib_0,\ \overline{\lambda}_0 = a_0 - ib_0,\ a_0, b_0 \in \mathbb{R})$$

   $$\Rightarrow \quad \lambda_0 v^T\overline{v} = \overline{\lambda}_0 v^T\overline{v}$$

   Wegen $v \neq 0$ ist $v^T\overline{v} = \|v\|^2 > 0$ und somit $\overline{\lambda}_0 = \lambda_0$, also $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

2. Eigenvektoren zu *verschiedenen* Eigenwerten von A sind orthogonal zueinander.

   Beweis:

   Sei $v_j \in \mathbb{R}_n$ Eigenvektor zu Eigenwert λ_j von A für $j = 1, 2$, d.h. $Av_j = \lambda_j v_j$.

   $$\underbrace{(\lambda_1 v_1)^T}_{=\lambda_1 v_1^T} v_2 = (Av_1)^T v_2 = v_1^T A^T v_2 = v_1^T(Av_2) = v_1^T\lambda_2 v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2$$

   $$\Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)v_1^T v_2 = 0$$

   Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so $\langle v_1, v_2\rangle = v_1^T v_2 = 0$.

4.4.5.0.1 Folgerung: Hat die symmetrische Matrix A alles *verschiedene* Eigenwerte (d.h. mit Vielfachheit 1), so bilden die zugehörigen Eigenvektoren, normiert auf 1, eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}_n$, und A ist folglich diagonalisierbar.

Allgemein gilt der

4.4.5.0.2 Hauptachsensatz: Jede symmetrische Matrix A ist diagonalisierbar, d.h. es existiert eine *Hauptachsentransformation* T, welche A in Diagonalgestalt überführt. Genauer:
Zu jeder symmetrischen Matrix A gibt es eine orthogonale Matrix T mit

$$T^T AT = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

In der Diagonalmatrix D stehen die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ von A jeweils mit der entsprechenden Vielfachheit. Die Spalten von T bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}_n$ bestehend aus Eigenvektoren zu A.

Beweis: (durch vollständige Induktion nach der Zeilenzahl n von A)

- *Induktionsanfang*

  $n = 1$. Damit ist A bereits in Diagonalgestalt.

- *Induktionsvorraussetzung*

  Sei Behauptung richtig für Zeilenzahl $n - 1$.

- *Induktionsschluss*

  a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Nach Fundamentalsatz und 1. existiert mindestens ein $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $v_1 \in \mathbb{R}_n$ mit $v_1 \neq 0$, $Av_1 = \lambda_1 v_1$. O.B.d.A. sei $||v_1|| = 1$.

  b) Setze $U_1 = \operatorname{lin}\{v_1\}$. Dann ist $\dim U_1 = 1$ und $\dim U_1^\perp = n-1$. Wähle zu Unterraum $U_1^\perp$ eine Orthonormalbasis $v_2, \dots, v_n$. Dann gilt

  $$\langle v_i, v_j \rangle = v_i^T v_j = \delta_{ij} \text{ für } i, j = 1, 2, \dots, n, \qquad (v_1 \perp v_j,\ j = 2, \dots, n)$$

  Setze $S = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist $S \in \mathrm{O}(n)$.

  $$S^T AS = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \Big(A(v_1, \dots, v_n) \Big) = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} (\underbrace{Av_1}_{=\lambda_1 v_1}, Av_2, \dots, Av_n)$$

  $$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 1 & c \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}^{n-1}, A' \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

Dabei ist $S^T AS$ symmetrisch, weil

$$(S^T(AS))^T = (AS)^T S = S^T A^T S = S^T AS$$

Folglich $c = 0$, $A' = (A')^T$.

c) Auf A' kann die Induktionsvorraussetzung angewendet werden, d.h. es gibt

$$T' \in \mathrm{O}(n-1) : (T')^T A' T = D'$$

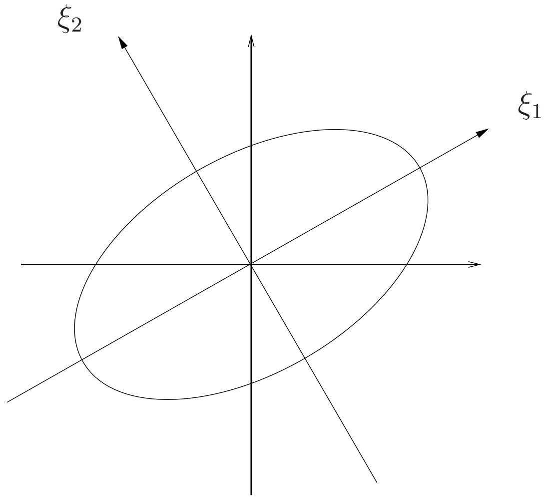
Setze $S' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T' \end{pmatrix}$, dann ist $S' \in \mathrm{O}(n)$. Berechne:

$$\underbrace{(S')^T(S^T}_{T^T} A \underbrace{S)S'}_{=:T} \underset{b)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (T')^T \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T' \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (T')^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A'T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & (T')^T AT' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix} =: D$$

Mit $T := SS'$; $S, S' \in \mathrm{O}(n)$ und der Gruppeneigenschaft von $\mathrm{O}(n)$ ist $T \in \mathrm{O}(n)$.

4.4.5.0.3 Bemerkung: Der Name „Hauptachsentransformation“ stammt aus der Theorie der Kegelschnitte, z.B. sucht man eine orthogonale Transformation $f : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$, welche die Koordinatenachsen (x_1-, x_2-Achse) in die „Hauptachsen“ (ξ_1-, ξ_2-Achse) einer Ellipse transformiert.



Beschreibung solcher Kegelschnitte in Mittelpunktslage durch die quadratische Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = c \tag{4.4.5.3}$$

mit gegebenen $a_{ij}, c \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$.

$$(4.4.5.3) \quad \Leftrightarrow \quad x^T Ax + c = 0, \quad A = (a_{ij}) = A^T$$

4.4.5.1 Schema zur praktischen Durchführung der Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen A

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = A^T$.

1. Schritt: Bilde $P_A(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda E_n)$ und bestimme dessen *verschiedene* Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, d.h. die verschiedenen Eigenwerte von A (etwa eine Nullstelle „erraten" und dann Abdividieren des zugehörigen Linearfaktors).

2. Schritt: Für jedes $k = 1, \dots, r$ bestimme eine Basis $B_k := \{w_1^{(k)}, \dots, w_{n_k}^{(k)}\}$ von $\mathrm{Eig}(A, \lambda_k)$, indem das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda_k E_n)x = 0$$

(z.B. mittels Gaußschen Algorithmus) gelöst wird.

3. Schritt: Orthonormiere B_k zu einer Orthonormalbasis $v_1^{(k)}, \dots, v_{n_k}^{(k)}$ von $\mathrm{Eig}(A, \lambda_k)$ mittels des Schmidtschen Verfahrens.

4. Schritt: Durch Aneinanderreihung dieser Orthonormalbasen entsteht die Orthonormalbasis des $\mathbb{R}_n$:

$$\{v_1, \dots, v_n\} = \{v_1^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_{n_2}^{(2)}, \dots, v_1^{(r)}, \dots, v_{n_r}^{(r)}\}$$

des $\mathbb{R}_n$ aus Eigenvektoren zu A. Setze $T := (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Dann ist

$$T^T A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \quad \text{(Möglichkeit zur Rechenkontrolle!)}$$

4.4.5.2 Beispiel zur Hauptachsentransformation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Schritt: Bestimmung der Eigenwerte von A

$$\mathrm{Det}(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 = \lambda^2(3 - \lambda)$$

$$P_A(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \lambda_{1/2/3}, \qquad \Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_{2/3} = 0$$

Vielfachheit von 3 ist 1, und Vielfachheit von 0 ist 2.

2. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren

i) zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$:
Eigenvektor-Gleichung:

$$\begin{array}{rrrcl} (1-3)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +(1-3)x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +(1-3)x_3 & = & 0 \end{array}$$

Ein Eigenvektor zu 3 ist $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. $\mathrm{Eig}(A,3) = \mathrm{lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

ii) zum Eigenwert $\lambda_{2/3} = 0$:
Eigenvektor-Gleichung:

$$x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad = \quad 0 \qquad (\Leftrightarrow \quad Ax = 0)$$

Zwei linear unabhängige Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

$\mathrm{Eig}(A,0) = \mathrm{lin}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

3. Schritt: Orthonormierung der Eigenvektoren

zu i)

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

zu ii)

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad U_2 = \mathrm{lin}(v_2)$$

$$\widetilde{v_3} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - P_{U_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \left(v_2^T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\cdot v_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$v_3 = \frac{1}{||\widetilde{v_3}||}\cdot\widetilde{v_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

4. Schritt: Orthonormalbasis des $\mathbb{R}_3$ aus Eigenvektoren zu A: v_1, v_2, v_3

$$T = (v_1, v_2 v_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1\\ \sqrt{2} & 0 & 2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^TAT = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

4.4.6 Anwendung der Hauptachsentransformation bei quadratischen Formen

4.4.6.0.1 Definition:

$$q(x) = q(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x \text{ mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n, A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

heißt *quadratische Form* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

4.4.6.1 Bemerkungen

i) Quadratische Formen treten in vielfältiger Form auf, z.B. in Physik, Geometrie usw. (s. z.B. Extremwertberechnung von Funktionen mehrerer Variablen).

ii) O.B.d.A. sei $A = A^T$ (symmetrisch). Andernfalls setzen wir

$$\widetilde{a}_{ij} := \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = \widetilde{a}_{ji} \text{ für } i, j = 1, \ldots, n$$

Dann ist $a_{kl} x_k x_l + a_{lk} x_l x_k = 2\widetilde{a}_{kl} x_k x_l = \widetilde{a}_{kl} x_k x_l + \widetilde{a}_{lk} x_l x_k$ und

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} x_i x_j = x^T \widetilde{A} x \quad \text{mit} \quad \widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij}) = \widetilde{A}^T.$$

iii) Zu q gibt es eine zugeordnete Bilinearform $b(.,.)$.

$$b(x, y) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^T A y, \quad x, y \in \mathbb{R}_n$$

Dann ist $q(x) = b(x, x)$ und außerdem ist $b(.,.)$ symmetrisch, d.h. $b(x, y) = b(y, x)$.

4.4.6.2 Definitheit

- Die quadratische Form q heißt *positiv definit*, falls $q(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}_n, x \neq 0$.
- Die quadratische Form q heißt *negativ definit*, falls $q(x) < 0$ für $x \in \mathbb{R}_n, x \neq 0$.

4.4.6.2.1 Kriterium für Definitheit von q:

$$\begin{array}{rcl} q \text{ positiv definit} & \Leftrightarrow & \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind positiv} \\ q \text{ negativ definit} & \Leftrightarrow & \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind negativ} \end{array}$$

Beweis:

a) ($\Rightarrow$) Sei $q(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. Wähle $x = v_i$ mit v_i Eigenvektor zu Eigenwert λ_i von A ($Av_i = \lambda_i v_i$). Wegen $v_i \neq 0$ ist

$$0 < q(v_i) = v_i^T \underbrace{Av_i}_{=\lambda_i v_i} = \lambda_i v_i^T v_i = \lambda_i \cdot \underbrace{||v_i||^2}_{>0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_i > 0, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

b) ($\Leftarrow$) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A = A^T$, jeweils mit der entsprechenden Vielfachheit, und $\lambda_i > 0$. Nach Hauptachsensatz gibt es Orthonormalbasis des $\mathbb{R}_n$ aus Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ zu A ($Av_i = \lambda_i v_i$).

Für $x \in \mathbb{R}_n$ gibt es die Darstellung $x = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$, $\mu_i \in \mathbb{R}$.

$$q(x) = x^T A x = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i v_i \right)^T A \left(\sum_{j=1}^n \mu_j v_j \right) = \sum_{i,j=1}^n \mu_i \mu_j v_i^T \underbrace{Av_j}_{=\lambda_j v_j}$$

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n \mu_i \mu_j \lambda_j \underbrace{v_i^T v_j}_{\substack{= \langle v_i, v_j \rangle \\ = \delta_{ij}}} = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \lambda_i$$

Für $x \neq 0$ muss mindestens ein $\mu_k \neq 0$ sein $\Rightarrow \mu_k^2 > 0 \Rightarrow q(x) > 0$.

4.4.6.2.2 Folgerung: Die zugehörige Bilinearform $b(.,.)$ ist genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}_n$, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

4.4.6.2.3 Bemerkung: Günstiger, weil ohne Eigenwert-Berechnung, ist das *Kriterium von Sylvester* (1814-1897):

q ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle *Hauptunterdeterminanten* von $A = (a_{ij})$:

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sind positiv