## Algebraische Grundstrukturen

Sei $G \neq \emptyset$ und $* : G \times G \to G$ eine Verknüpfung auf $G$, dann heißt $(G, *)$ eine Gruppe, falls

**(G1)** $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a, b, c \in G$ gilt

*(Assoziativität)*,

**(G2)** es $e \in G$ gibt mit $a * e = e * a = a$ für alle $a \in G$

*(Existenz eines neutralen Elements)*,

**(G3)** es zu jedem $a \in G$ ein $b \in G$ gibt

mit $a * b = b * a = e$

*(Existenz eines inversen Elements)*.

$(G, *)$ heißt kommutative oder abelsche Gruppe, wenn zusätzlich gilt

**(G4)** $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$

*(Kommutativität)*.

Ein Körper besteht aus einer Menge $K$, auf der zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert sind, so daß

**(K1)** $(K, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 ist,

**(K2)** $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist,

**(K3)** $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in R$ gilt
*(Distributivität).*

Ein Ring besteht aus einer Menge $R$, auf der zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert sind, so daß

**(R1)** $(R, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 ist,

**(R2)** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in R$ gilt
*(Assoziativität der Multiplikation),*

**(R3)** $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in R$ gilt
*(Distributivität).*