Gewöhnliche Differentialgleichungen — Hans-Peter Gittel
für Lehramt — Universität Leipzig
Sommersemester 2019 — Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (6. Serie)

Abgabetermin: 25.06.2019

31. Unter Benutzung der Definition der Matrix-Exponentialfunktion $\exp(A) = e^A$ in Aufgabe 30 zeige man:

a) Ist B eine reguläre $n \times n$-Matrix, dann gilt $e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$.

b) Für vertauschbare Matrizen A_1, A_2 gilt $e^{A_1+A_2} = e^{A_1}e^{A_2}$.

c) Es existiert $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

32. Bestimme jeweils ein reelles Fundamentalsystem für die Differentialgleichungssysteme $y' = Ay$ mit

$$\text{a)} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}.$$

(*Hinweis:* Die Koeffizientenmatrix A in b) ist nicht symmetrisch und besitzt nur einen Eigenwert λ. Es besteht Ungleichheit zwischen seiner algebraischen und geometrischen Vielfachheit. Zur Ermittlung eines zweiten linear unabhängigen Lösungsvektors $\tilde{y}$ ist vom Ansatz $\tilde{y}(x) = (z + x\tilde{z})e^{\lambda x}$ auszugehen. Die Berechnung der Vektoren $z, \tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ erfolgt durch Einsetzen dieses Ansatzes in das Differentialgleichungssystem.)

33. Löse das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y_1' &= \quad y_1 + \ y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 3y_2 \ ; \\ y_1(\pi) &= 3, \ y_2(\pi) = 2 \ . \end{aligned}$$

34. Zeige, dass die Menge

$$\mathcal{P}_r := \left\{ f \in C(\mathbb{R},\mathbb{C}) \;\middle|\; f(x) = \sum_{\nu=0}^{r} c_\nu x^\nu e^{\lambda x},\ c_\nu \in \mathbb{C} \right\}$$

einen $(r+1)$-dimensionalen Unterraum von $C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ bildet und als Basis die Funktionen $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^r e^{\lambda x}$ besitzt.

35. Bestimme jeweils die allgemeine (reelle) Lösung der Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad y^{(5)} - 8y'' = 0 \ ; \\ &\text{b)} \quad y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0 \ ; \\ &\text{c)} \quad y''' + y'' - 4y' - 4y = 2 - 4x \ . \end{aligned}$$

(*Hinweis:* Ein spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in c) kann man entweder durch einen Ansatz aus der gleichen Klasse von Funktionen wie die Störung erhalten oder durch Übergang zum äquivalenten Differentialgleichungssystem erster Ordnung und Variation der Konstanten.)

36. Löse die Anfangswertprobleme:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad y'' + 2y' + 5y = 0 \ ; \quad y(0) = -2,\ y'(0) = 3 \ , \\ &\text{b)} \quad y'' - 4y' + 3y = x \ ; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \ . \end{aligned}$$

– Wichtige Information !! –

Die Fachschaftsräte Mathematik und Informatik laden Euch herzlich zu unserem gemeinsamen Sommerfest am 19. Juni 2019 ab 15 Uhr im Friedenspark (Süd-Ost-Ecke) ein. Es gibt unter anderem ein Volleyballturnier, Musik, Getränke und Gegrilltes. Wir freuen uns auf Euch!