Gewöhnliche Differentialgleichungen
für Lehramt
Sommersemester 2019

Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

# Übungsaufgaben (5. Serie)

**Abgabetermin: 11.06.2019**

25. Berechne die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung für die Lösung $y$ des Anfangswertproblems:

$$y' = e^{-x} + (x-1)\sin y \ , \quad y(0) = 0 \ ,$$

bis zur 4. Potenz.

26. Transformiere das folgende Differentialgleichungssystem 2. Ordnung in ein äquivalentes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$y'' = \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 y_3' - \sinh y_2' - 2x^4 \\ y_3' + 6y_2 y_3^2 + y_2^4 \ln(x+7) \\ 2(y_2')^5 - e^{-xy_1} + \cos(3x^2) \end{pmatrix} \ .$$

27. Bestimme die Massenzerfallsgesetze für eine dreigliedrige Zerfallsreihe:

$$S_1 \xrightarrow{\lambda_1} S_2 \xrightarrow{\lambda_2} S_3$$

(s.a. Beispiel aus der Vorlesung) durch rekursives Lösen der Differentialgleichungen beginnend mit der ersten Zeile. Beachte auch den Fall $\lambda_1 = \lambda_2$.

28. Bestimme ein Fundamentalsystem zu

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j \ , \quad i = 1, \ldots, n \ , \quad a_j = \text{ const}$$

und berechne die zugehörige Wronski-Determinante (Determinante der zugehörigen Fundamentalmatrix).

29. a) Zeige, dass die beiden Funktionenvektoren $\begin{pmatrix} 3x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -x^{-2} \\ x^{-2} \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem für das zu

$$\begin{aligned} y_1' &= \tfrac{1}{x}y_1 + \tfrac{3}{x}y_2 + 1 \\ y_2' &= \tfrac{1}{x}y_1 - \tfrac{1}{x}y_2 \end{aligned}$$

gehörende lineare homogene Differentialgleichungssystem bilden.

b) Bestimme mittels Variation der Konstanten die allgemeine Lösung des obigen linearen inhomogenen Differentialgleichungssystems.

30. Es sei $A = (a_{ij})$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Zeige:

a) Bezeichnet $a_{ij}^{(k)}$ die Elemente der Matrix $A^k$, dann konvergiert jede der $n^2$ Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)} =: b_{ij}, \quad i, j = 1, ..., n$$

absolut. Man definiert die *Matrix-Exponentialfunktion* durch

$$\exp(A) = e^A := (b_{ij}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

b) Die Summe der unendlichen Matrix-Reihe $\exp(xA)$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist eine Fundamentalmatrix für das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ .