

Übungsaufgaben (4. Serie)

Abgabetermin: 28.05.2019

19. Es sei

$$f(y) := \begin{cases} y \sin \frac{1}{y} & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \end{cases}$$

Zeige, dass f in jedem Intervall $[a, b]$, $a > 0$, einer Lipschitz-Bedingung bez. y genügt, während dagegen im Intervall $[0, b]$ die Funktion f stetig, jedoch nicht Lipschitz-stetig ist.

20. Beweise mittels vollständiger Induktion nach n die in der Vorlesung angegebene Abschätzung

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \Delta_0 \frac{L^n}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{für } x \in [x_0, x_0 + \alpha] \text{ und } n = 0, 1, 2, \dots$$

für die Differenz zweier Näherungen nach dem Verfahren der sukzessiven Approximation. Hierbei ist die Bedeutung von L und α dem Satz von Picard-Lindelöf zu entnehmen und

$$\Delta_0 := \|y_1 - y_0\| = \max_{x \in [x_0, x_0 + \alpha]} |y_1(x) - y_0(x)|.$$

21. Ermittle alle Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, für die Anfangswertprobleme zu den folgenden Differentialgleichungen mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ in einer geeigneten Umgebung von x_0 eindeutig lösbar sind. Bestimme gegebenenfalls diese Lösungen sowie ihre Definitionsbereiche:

$$\text{a) } y' = \frac{-y + 2}{x + y}, \quad \text{b) } y' = y \ln y.$$

(*Hinweis:* Hinreichende Bedingungen des Satzes von Picard-Lindelöf überprüfen, restliche Punkte separat untersuchen)

22. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (d.h., eine nichtleere offene und zusammenhängende Teilmenge) und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(y) - f(\tilde{y})| \leq C \|y - \tilde{y}\|^\alpha \quad \text{für alle } y, \tilde{y} \in \Omega ,$$

wobei $L \geq 0$ und $\alpha > 1$ feste Zahlen (*unabhängig von* $y, \tilde{y} \in \Omega$) sind und $\|\cdot\|$ die Maximum-Norm im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Zeige, dass f in Ω konstant ist.

23. a) Löse das Anfangswertproblem: $y' = \frac{x}{2}y - x^3$, $y(0) = -2$.

b) Berechne mittels Eulerschen Polygonzugverfahren die Näherungswerte y_k zu obigem Anfangswertproblem bei äquidistanter Zerlegung des Intervalls $[0, 2]$ mit den Schrittweiten $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ und vergleiche mit den Funktionswerten $y(x_k)$ der exakten Lösung.

c) Stelle die 3 Polygonzüge zusammen mit der exakten Lösung grafisch dar.

24. Die Differentialgleichung $xy'' + y' - xy = 0$ besitzt Lösungen, die sich in eine Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

entwickeln lassen. Man berechne die Koeffizienten a_n und bestimme den Konvergenzradius. Wieviele derartige Lösungen gibt es?

(*Hinweis:* Setze die Reihe in die Differentialgleichung ein und vergleiche die Koeffizienten.)