

Übungsaufgaben (3. Serie)

Abgabetermin: 14.05.2019

13. a) Teste die folgende Differentialgleichung auf Exaktheit

$$(3x^2y^2 + 2y - 1) + (2x^3y + 2x + 2y)y' = 0$$

b) Löse das Anfangswertproblem zu a) mit $y(0) = 1$.

14. Mögen die Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichung

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

in einem Rechteck $R \subseteq \mathbb{R}^2$ stetige partielle Ableitungen besitzen. Zeige:

a) Ist $Q \neq 0$ in R und hängt die Funktion $\frac{1}{Q}(P_y - Q_x)$ nur von der Variablen x ab, so existiert ein integrierender Faktor $M = M(x)$.

b) Ist $P \neq 0$ in R und hängt die Funktion $\frac{1}{P}(P_y - Q_x)$ nur von der Variablen y ab, so existiert ein integrierender Faktor $M = M(y)$.

Bestimme jeweils eine Darstellung des gesuchten Eulerschen Multiplikators.

15. Es sei $\mathcal{C} : y = y(x)$, $y(1) = 1$ eine stetig differenzierbare Kurve im ersten Quadranten eines rechtwinkligen Koordinatensystems im $\mathbb{R}^2$. Für einen Punkt $Q \in \mathcal{C}$ bezeichne T_Q die zu Q gehörige Tangente an $\mathcal{C}$. T_Q schneide die positive x -Achse im Punkt P . Sei $\Delta = \Delta(P, Q, O)$ das durch die Punkte P, Q und den Koordinatenursprung O bestimmte Dreieck. Fertige eine Skizze zur geometrischen Situation an und bestimme die Kurve $\mathcal{C}$ so, dass der Flächeninhalt $\mathcal{A}(\Delta)$ dieses Dreiecks unabhängig vom Berührungspunkt $Q \in \mathcal{C}$ wird, d.h. $\mathcal{A}(\Delta) = \text{const}$ für alle Positionen des Berührungspunkts auf $\mathcal{C}$.

(Hinweis: Die Aufgabenstellung führt auf eine Differentialgleichung erster Ordnung, die mittels Übungsaufgabe 14.b) in eine exakte Differentialgleichung überführt werden kann.)

16. Bestimme die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen:

a) $y'' = 4x - \frac{2}{x}y' ,$

b) $(2xy + \cos y) + (x^2 - y - x \sin y)y' = 0 .$

17. (*Wiederholung aus der linearen Algebra*)

a) Zeige, dass die Menge aller auf $I := [a, b]$ definierten stetigen Funktionen einen linearen Vektorraum $C(I)$ bildet.

b) Überprüfe die Normeigenschaften für den Ausdruck

$$\|\varphi\| := \max_{x \in I} |\varphi(x)| , \quad \varphi \in C(I).$$

18. a) Berechne die ersten 3 Näherungen y_0, y_1, y_2 nach dem Picard-Lindelöfschen Approximationsverfahren zum Anfangswertproblem:

$$y' = -xy \quad \text{für } x \in [-1, 1], \quad y(0) = 1 .$$

b) Ermittle eine Summenformel für die n -te Näherung y_n und beweise diese durch vollständige Induktion.

c) Zeige explizit die Konvergenz von y_n gegen die exakte Lösung dieses Anfangswertproblems.