Gewöhnliche Differentialgleichungen
für Lehramt
Sommersemester 2019

Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (2. Serie)

Abgabetermin: **30.04.2019**

7. a) Zeige, dass die Differentialgleichung

$$y' = f\,(y + ax + b)$$

mit gegebener Funktion f und $a, b \in \mathbb{R}$ durch die Substitution $z = y + ax + b$ in eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen übergeht.

b) Löse das Anfangswertproblem: $y' = (y + x)^2 + 1\ ,\ y(1) = -1\ .$

8. Löse das Anfangswertproblem: $y'' = 2\sin(2y)\ ;\quad y(0) = \frac{1}{2}\pi\ ,\ y'(0) = 2\ .$

(*Hinweis*: Multiplikation der Differentialgleichung mit $2y'$ und Umformung beider Seiten der sich ergebenden Gleichung jeweils in die Ableitung einer geeigneten Funktion)

9. a) Löse die Differentialgleichung für die Scheinwerferform

$$y' = \frac{1}{y}\left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

(s.a. Beispiel aus Vorlesung) mittels der Standardsubstitution $z = \frac{y}{x}$.

b) Löse das Anfangswertproblem: $y' = -\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} - 1\ ,\ y(-1) = 2\ .$

10. a) In der linearen Differentialgleichung $y' = a(x)y + s(x)$ seien die Funktionen a, s stetig für $x \in (x_0, x_1)$ und $a(x) \neq 0$. Zeige folgende Eigenschaft:
Die Geraden mit denjenigen Richtungen, welche das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung den Punkten einer Geraden $x = \xi$, $\xi \in (x_0, x_1)$ zuordnet, verlaufen alle durch einem Punkt $P(\xi) \in \mathbb{R}^2$.
Berechne die Koordinaten von $P(\xi)$. Die durch die Parameterdarstellung $\xi \mapsto P(\xi)$, $\xi \in (x_0, x_1)$ bestimmte Kurve heißt *Leitkurve* der Differentialgleichung.

b) Bestimme die Gleichung der Leitkurve zur Differentialgleichung

$$y' = \frac{x}{x^2-1}y - \frac{5}{x^2-1}$$

im Intervall $1 < x < 4$. Skizziere das Richtungsfeld für die Werte $x = \frac{3}{2}, 2, \ldots, \frac{7}{2}$.

11. Löse das Anfangswertproblem: $y' = y \tan x + \cos x \ , \ y(\frac{\pi}{4}) = 0 \ .$

12. a) Bestimme die allgemeine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung

$$y' = -2y + y^2 e^x \ .$$

b) Löse zur Differentialgleichung aus a) die Anfangswertprobleme mit:

$$y(1) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad y(1) = 1 \qquad \text{bzw.} \quad y(1) = -1$$

und bestimme jeweils das maximale Existenzintervall der Lösung.