Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (1. Serie)

Abgabetermin: 16.04.2019

1. Der atomare Zerfall einer radioaktiven Substanz erfolgt nach dem Gesetz

$$M'(t) = -\alpha M(t) \qquad \text{für} \qquad t > 0$$

mit einer reellen Konstanten $\alpha > 0$, wobei $M(t)$ die Masse der Substanz zur Zeit t angibt.

a) Bestimme die Halbwertszeit, d.h. diejenige Zeit, in der die Hälfte der vorhandenen Substanz zerfallen ist.

b) Die Lagerung radioaktiver Abfälle erfolgt in Behältern aus rostfreiem Stahl oder Beton unter der Erde. Diese gelten als sicher, wenn sie so lange haltbar sind, bis 99,99 % der eingelagerten Substanz zerstrahlt sind. Wie groß muss diese Mindestlebenszeit der Behälter sein, wenn darin Abfälle von Strontium–90 (Halbwertszeit 28 Jahre) lagern?

2. Löse das Anfangswertproblem:

$$y^{(3)} = \sin(2x) \; ; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{32}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \; .$$

3. Stelle Differentialgleichungen für folgende Kurvenscharen in der x-y-Ebene auf, welche von reellen Parametern $a, b, c, \ldots$ abhängen:

a) $y = a(x-b)^2$,
b) $y = ae^{2x} + be^x + c$,
c) alle Kreise vom Radius 1, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt.

Kommentar: Es handelt sich hierbei jeweils um ein sogenanntes *inverses Problem*: Gegeben ist eine Schar von Funktionen, und es wird nach einer Differentialgleichung gefragt, deren Lösungsmenge mit dieser Schar zusammenfällt. Dabei ist eine Differentialgleichung zu erwarten, deren Ordnung gleich der Anzahl der Parameter in der Schar ist.

(*Hinweis*: Differentiation nach x und Elimination der Parameter führt auf die gesuchte Differentialgleichung.)

4. Löse die Differentialgleichung

$$y' = \lambda \frac{y}{x} \qquad \text{für} \qquad \lambda = -1, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}$$

und skizziere jeweils das zugehörige Richtungsfeld sowie einige Lösungskurven.

5. Löse das Anfangswertproblem: $\qquad y' = \dfrac{y}{1-x^2}\ ,\ y(0) = 1\ .$

6. Im $\mathbb{R}^2$ bewege sich eine Dame und ihr Hündchen folgendermaßen:
Die Dame - Position $P = (a, 0)$ - spaziere entlang der x-Achse in positiver Richtung und ziehe dabei das Hündchen - Position $Q = (x, y)$ - an einer Leine der festen Länge $l > 0$ hinter sich her. Der Hund Q bewege sich (bei straffer Leine) stets in Richtung der Verbindung PQ. Fertige eine Skizze zur geometrischen Situation an und bestimme die Gleichung der Kurve, die das Hündchen durchläuft, wenn sich die Beteiligten am Anfang an den Orten $P_0 = (0, 0)$ bzw. $Q_0 = (0, l)$ aufgehalten haben.

Kommentar: Bei der gesuchten Kurve handelt es sich um eine sogenannte *Schleppkurve* oder *Traktrix*. Diese wurde bereits von G.W. Leibniz (1646 - 1716) untersucht.

(*Hinweis*: Es genügt, wenn die Bahnkurve in der Form $x = \psi(y)$ angegeben wird.)