

Wiederholungsaufgaben

– Aufgaben zur Klausurvorbereitung –

Bemerkung: Eine Auswahl ähnlicher Aufgabentypen wird den Inhalt der Klausur bilden. Hinzu kommen noch kleine Fragen zu grundlegenden mathematischen Begriffen und Sachverhalten aus der Vorlesung. Es sind keine Hilfsmittel außer der „Tabelle einiger Grundintegrale“ (s. Übersichten zur Vorlesung) zugelassen. Diese Tabelle wird für jeden Teilnehmer zur Klausur bereitgestellt. Die Klausur wird 60 Minuten dauern.

Aufgabe 1: Lösen Sie die Anfangswertprobleme:

- a) $x^2 y' = 1 + y^2$; $y(4) = 1$,
b) $y' = \frac{y^2 + 3xy}{x^2}$; $y(1) = 1$,
c) $y' = -3y + \cos x$; $y(0) = 2\pi$. Berechnen Sie außerdem die ersten 3 Näherungen y_0, y_1, y_2 nach dem Picard-Lindelöfschen Approximationsverfahren.

Aufgabe 2:

- a) Untersuchen Sie die folgende Differentialgleichung auf Exaktheit

$$\cos x + (4ye^{-y} + \sin x)y' = 0 .$$

- b) Bestimmen Sie einen nur von y abhängigen Eulerschen Multiplikator für diese Differentialgleichung und anschließend ihre allgemeine Lösung.

Aufgabe 3:

Sei $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in C(I, \mathbb{R}^2)$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem zum linearen homogenen Differentialgleichungssystem

$$y'_j(x) = \sum_{k=1}^2 a_{jk}(x)y_k(x) , \quad j = 1, 2 .$$

Beweisen Sie, dass dann für die Wronski-Determinante

$$w(x) := W(\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x))$$

die Differentialgleichung $w'(x) = (a_{11}(x) + a_{22}(x))w(x)$ für $x \in I$ gilt.

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung des linearen homogenen Differentialgleichungssystems

$$y_1' = -4y_1 + 2y_2$$

$$y_2' = -y_2 + y_3$$

$$y_3' = 2y_1 - y_3$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für das lineare inhomogene Differentialgleichungssystem

$$y_1' = y_1 + y_2 - 5x + 2$$

$$y_2' = 4y_1 - 2y_2 - 8x - 8 ;$$

$$y_1(0) = 2, y_2(0) = 4 .$$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung zu:

a) $y'' + 4y' + 4y = 50 \sin x$,

b) $y^{(5)} + 3y^{(3)} + 2y' = 0$.

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen und skizzieren Sie die Phasenporträts folgender Differentialgleichungssysteme:

a) $\dot{x} = x - 3y$

$$\dot{y} = 2x - y ;$$

b) $\dot{x} = 2y$

$$\dot{y} = -x - 10y .$$