

## Übungsaufgaben Finanzmathematik I WS09/10

Serie 1, Abgabe: 4.11.2009

**Aufgabe 1.** Betrachten Sie eine Anleihe mit Kurs  $P_t$ , Fälligkeit von 2 Jahren, Nennwert 1 und halbjährlichen Zinszahlungen in Höhe von 2% des Nennwerts. Bezeichne für  $T \geq t$  mit  $B(t, T)$  den Kurs in  $t$  der Nullkuponanleihe mit Fälligkeit  $T$ . Geben Sie den Terminpreis der Anleihe mit Fälligkeit  $T = 1$  (nach der Kuponzahlung) an. (3 Punkte)

**Aufgabe 2.** Betrachten Sie einen Markt  $D, \mathbf{S}$  mit 3 Wertpapieren, Auszahlungsmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 60 & 11 & 32 \\ 59 & 7 & 36 \\ 57 & 10 & 41 \end{pmatrix}$$

und Preissystem  $\mathbf{S} = (56, 8, 33)'$ .

- a) Zeigen Sie, dass das Modell vollständig und arbitragefrei ist und bestimmen Sie den Zustandspreisvektor  $\psi$ . (2 Punkte)
- b) Bestimmen Sie ein risikofreies Portfolio  $\bar{\theta}$ , den Preis der Nullkuponanleihe  $B(0, T)$  und den risikofreien Zinssatz  $r$ . (2 Punkte)
- c) Bestimmen Sie das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  und verifizieren Sie, dass  $B(0, T) = \sum_{k=1}^3 \psi_k$ . (2 Punkte)

**Aufgabe 3.** Betrachten Sie einen Markt mit 2 Wertpapieren, Preisvektor  $\mathbf{S} = (1, 150)'$  und Auszahlungsmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 180 \\ 1 & 150 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass der Markt arbitragefrei ist und bestimmen Sie die Menge aller Zustandspreise. (2 Punkte)
- b) Betrachten Sie eine Put Option auf Wertpapier 2 mit Ausübungspreis  $K = 140$ . Geben Sie den Auszahlungsvektor  $\mathbf{W}^{\text{put}}$  an. Ist die Option erreichbar? Berechnen Sie

$$\sup\{\psi' \mathbf{W}^{\text{put}} : \psi \text{ Zustandspreisvektor}\}$$

und geben Sie den Maximierer  $\psi^*$  an. Ist  $\psi^*$  ein Zustandspreisvektor? (2 Punkte)

**Aufgabe 4.** Betrachte einen arbitragefreien Markt  $(D, \mathbf{S})$  und eine bedingte Auszahlung  $\mathbf{W}$ . Bezeichne mit  $\tilde{\Psi}$  die Menge aller Zustandspreise. Zeigen Sie, dass  $\mathbf{W}$  genau dann nicht erreichbar ist, wenn gilt, dass

$$\inf_{\psi \in \tilde{\Psi}} \psi' \mathbf{W} < \sup_{\psi \in \tilde{\Psi}} \psi' \mathbf{W}.$$

(5 Punkte)