Notiztitel 10.04.2018

Topologie

SS 2018

τοπος = Ort
λογος = Wort
Entstanden: 1914, Felix Hausdorff („top. Raum")
Moderne Def.: K. Kuratowski / H. Tietze 1922
Davor: Euler, Cantor, ...

I. Einführung

I.1. Grundbegriffe

$\boxed{\text{Def}}$ Sei X eine Menge und τ eine Familie von Teilmengen von X. Das Paar (X, τ) heißt <u>topologischer Raum (TR)</u> und τ heißt <u>Topologie auf X</u>, wenn

(a) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$

(b) Beliebige Vereinigungen von Mengen aus τ gehören zu τ:

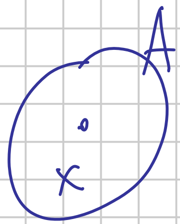
$$U_\alpha \in \tau,\ \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$$

(c) Endliche Durchschnitte von Mengen aus τ —"— :

$U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \tau$.

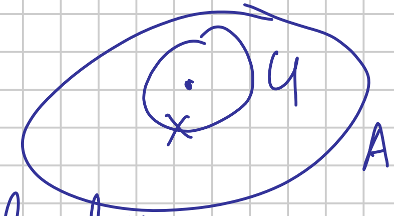
Dabei heißt $A \subset X$

- offen, wenn $A \in \tau$
- abgeschlossen, wenn $X \setminus A \in \tau$ (d.h., $X \setminus A$ offen)



- Umgebung von $x \in X$, wenn A offen und $x \in A$

(Achtung: in manchen Büchern: $\exists\, U$ offen mit $x \in U \subset A$)



Bem. (b) $\Longleftrightarrow$ bel. Durchschnitte abg. Mengen sind abg.

(c) $\Longleftrightarrow$ endl. Vereinigungen —"—

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) jede Menge X hat (mindestens) zwei Topologien:

- $\{\emptyset, X\}$ – indiskrete Top.
- $2^X = \{$alle Teilm. von $X\}$ – diskrete Top. ($\forall$ Menge ist offen)

2) $X = \{\cdot, *, \circ\}$

$\tau := \{\emptyset, \{*\}, \{\cdot, *\}, \{\cdot, *, \circ\}\}$

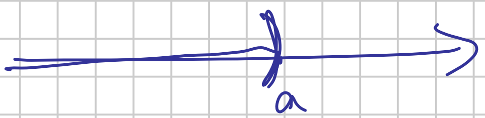
Ü Bestimmen Sie alle Top. auf X.

3) Sei X unendlich.

$\tau := \{ A \subset X : X \setminus A \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset, X \}$

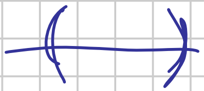
ist eine Top. (Ü), genannt cofinite Top.

4) $X = \mathbb{R}$, $\quad \tau := \{ (-\infty, a) : a \in \mathbb{R} \} \cup \{ \mathbb{R}, \emptyset \}$ Ü



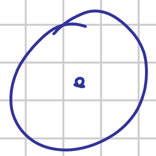
oder $\tau_1 := \tau \cup \{ (-\infty, a] : a \in \mathbb{R} \}$ Ü

5) $\mathbb{R}$ mit $\tau :=$ belieb. Vereinigungen von offenen Intervallen (α, β) $\cup \{ \emptyset, \mathbb{R} \}$



– die natürliche Top. auf $\mathbb{R}$

Analog: Sei (X, d) metr. Raum. Dann ist



$\tau :=$ belieb. Vereinigungen offener Kugeln $\cup \{\emptyset, X\}$

$$\mathcal{U}_r(a) := \{ x \in X : d(x,a) < r \}$$

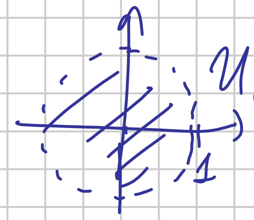
eine Top. ü. Man sagt: τ ist von der Metrik d induziert.

Bem. Verschiedene Metriken können dieselbe Top. induzieren:

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\mathbb{R}^2$, $d_1(x,y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

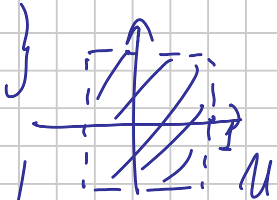
$\mathcal{U}_1(0)$

$$d_2(x,y) := \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$$

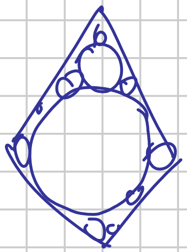


$\mathcal{U}_1(0)$

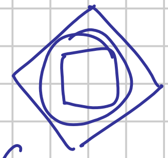
$d_\infty(x,y) := \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$



erzeugen alle dieselbe (genannt euklidische) Top., da Vereinigungen von off. Kugeln dieselben sind.



oder



Def. Ein TR (top. Raum) (X,τ) heißt metrisierbar, wenn τ von einer Metrik auf X induziert wird.

Bem. (X,τ) metrisierbar $\Rightarrow$ (X,τ) ist Hausdorff, d.h., $\forall x,y \in X$, $x \neq y$ $\exists U, V$ offen mit $x \in U, y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

/nimm $U := U_{d/2}(x)$, $V := U_{d/2}(y)$ für $d := d(x,y)$)

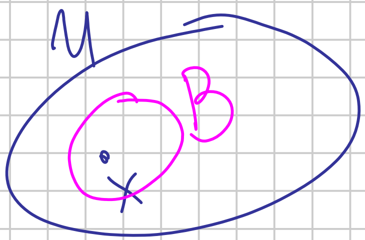
Bsp 1) $|X| \geq 2$, $\tau = \{\emptyset, X\}$ ist nicht Hausdorff $\Rightarrow$ nicht metris.

2) $\mathbb{R}$, $\tau := \{(-\infty, a), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ nicht Hausdorff (warum?) $\Rightarrow$ nicht metris.

Def Sei (X,τ) TR. Eine Familie $\mathcal{B} \subset \tau$ heißt

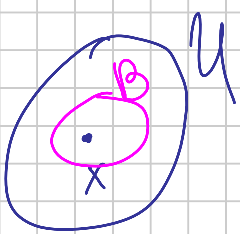
- Basis der Top., wenn

$$\forall U \in \tau \quad \forall x \in U \quad \exists B \subset \mathcal{B} \text{ mit } x \in B \subset U$$



Ü: $\mathcal{B}$ Basis $\Leftrightarrow$ $\forall U \in \tau$ ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$)

- Subbasis der Top., wenn die Menge aller endl. Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{B}$ eine Basis der Top. ist.
- Umgebungsbasis von $x \in X$, wenn
  $\forall$ Umg. $\mathcal{U}$ von x $\exists$ Umg. $B \in \mathcal{B}$ von x mit $B \subset \mathcal{U}$.



Bem.: 1) τ ist eindeutig durch ihre Basis $\mathcal{B}$ bestimmt:

$$\mathcal{U} \text{ offen} \iff \mathcal{U} = \bigcup \text{Mengen aus } \mathcal{B}$$

Dasselbe gilt für Subbasis $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{U} \text{ offen} \iff \bigcup (\text{endl. Durchschn. von Mengen aus } \mathcal{S})$$

2) Basis, Subbasis, Umgebungsbasis sind i.A. nicht eindeutig:

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $\mathbb{R}$, $\tau :=$ natürliche Top.

$\mathcal{B} := \{ (a,b),\ a,b \in \mathbb{R} \}$ – Basis

aber auch $\{$ –"– $,\ a,b \in \mathbb{Q} \}$.

$\mathcal{S} := \{ (-\infty, a), (b, \infty),\ a,b \in \mathbb{R} \}$ – Subbasis

aber auch $\{$ –"– $,\ a,b \in \mathbb{Q} \}$.

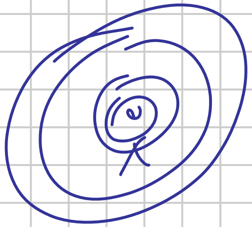
2) X beliebig, $\tau = 2^X$ – diskrete Top.

$\mathcal{B} := \{ \{x\},\ x \in X \}$ – Basis

$\mathcal{S} := \{\text{endl. Teilm.}\}$ – Subbasis

$\boxed{\text{Def}}$ Sei (X,T) TR. Man sagt, (X,τ) erfüllt

- das <u>erste Abzählbarkeitsaxiom</u>, wenn $\forall x \in X$ $\exists$ abz. Umgebungsbasis abz. X,
- das <u>zweite Abzählbarkeitsaxiom</u>, wenn $\exists$ abz. Basis von τ.



<u>Bem.</u> 2. Abz.' Axiom $\Rightarrow$ 1. Abz.' Axiom   Ü

$\not\Leftarrow$ Bsp.: $\mathbb{R}$ mit diskr. Top.

$\boxed{\text{Bsp}}$ (X, d) metrisch $\Rightarrow$ erfüllt 1. Abz. Axiom
(nimm $U_n := U_{1/n}(x)$)

Ü (X, d) Metrik erfüllt 2. Abz. Axiom $\Leftrightarrow$ (X, d) separabel,
d.h., $\exists$ abz. dichte Teilmenge $D \subset X$,
(Dabei heißt $D \subset X$ dicht, wenn $\forall$ off. Kugel U
$U \cap D \neq \emptyset$).

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\mathbb{R}$ mit natürl. Top. (erzeugt von $d(x,y) = |x-y|$)
Sep.: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht.
Abz. Basis: $\{U_r(a),\ r, a \in \mathbb{Q}\} = \{(a,b),\ a,b \in \mathbb{Q}\}$

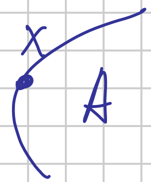
Weitere Def.:

$\boxed{\text{Def}}$ Sei (X, τ) TR, $A \subset X$. Dann heißt $x \in X$

$A \subset X$ heißt

- <u>innerer Punkt</u> von A, wenn
  $\exists\, U \in \tau : x \in U \subset A$
  Die Menge aller inneren Punkte: $\mathring{A}$

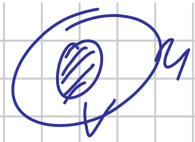
- <u>Randpunkt</u> von A, wenn
  $\forall\, U \in \tau$ mit $x \in U$,
  $U \cap A \neq \emptyset$ und $U \cap \underset{\substack{\parallel \\ X\setminus A}}{A^c} \neq \emptyset$.



  Bezeichnung: $x \in \partial A$

- <u>dicht</u> in X, wenn $\forall\, U \in \tau \quad U \cap A \neq \emptyset$
- <u>nirgends dicht</u>, wenn $\forall\, U \in \tau\ \exists\, V \in \tau$

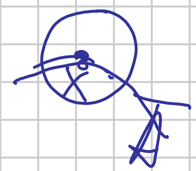
mit $V \subset U$ und $V \cap A = \emptyset$.



(„überall Lücken")

Die Menge $\overline{A} := \{x \in X : \forall U \in \mathcal{U}(x) \quad U \cap A \neq \emptyset\}$ — Umgebungen von x

heißt **Abschluss** (oder **abg. Hülle**) von A.



$\boxed{\text{Prop}}$ Sei (X, τ) ein TR, $A \subset X$.

(a) $\overline{A}$ ist abg. und $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ abg.} \\ F \supset A}} F$, d.h.,

$\overline{A}$ ist die kleinste abg. Menge, die A enthält.

Insb. gilt: A abg. $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

(b) $\mathring{A}$ ist offen und $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \text{ offen} \\ U \subset A}} U$, d.h., $\mathring{A}$ ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist.

Insb.: A offen $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$

(c) $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

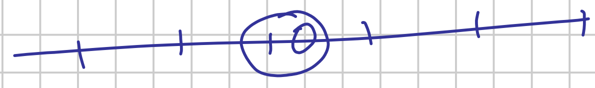
(d) $\partial A \cup \mathring{A} \cup (A^c)^\circ = X$ – disj. Vereinigung

Beweis: Ü

Bem.: A dicht $\Leftrightarrow \overline{A} = X$

A nirgends dicht $\Leftrightarrow (\overline{A})^\circ = \emptyset$ } Ü

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ dicht, $\mathbb{Z}$ nirgends dicht



2) C Cantormenge :

$C \subset [0,1]$

$C_1 := [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$

$C_2 := [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$

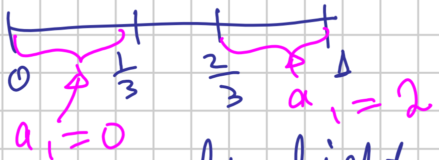
usw...

$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Es gilt:

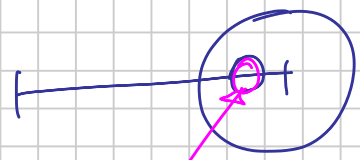
- C abg. (da alle C_n abg.)
- C überabzählbar:

$x \in C \Leftrightarrow x = 0,a_1 a_2 a_3 \ldots$ mit $a_i \in \{0,2\}$ (triadische Darstellung)



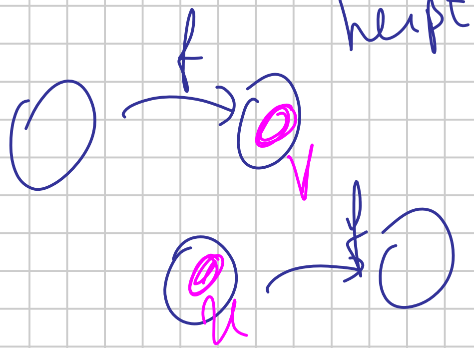
usw.

- C nirgends dicht : $\mathring{\mathcal{U}}$



$\boxed{\text{Def}}$ Seien (X,τ), (Y,ν) TR. Eine Abb. $f: X \to Y$ heißt

- **stetig**, wenn Urbilder off. Mengen offen sind:
  $\forall V \in \nu \quad f^{-1}(V) \in \tau$
- **offen**, wenn Bilder — " — :
  $\forall U \in \tau \quad f(U) \in \nu$
- **Homöomorphismus**, wenn f bij und f, f^{-1} stetig



Bem. 1) Es gilt: $f: X \to Y$ ist

- stetig $\Leftrightarrow$ Urbilder abg. Mengen sind abg.
  $\Leftrightarrow$ Urbilder Elemente einer (Sub)Basis offen
- offen $\Leftrightarrow$ Urbilder Elemente einer Basis offen
- Homöom. $\Leftrightarrow$ f bij, stetig und offen.

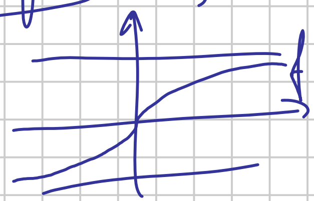
2) $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ stetig $\Rightarrow$ $g \circ f: X \to Z$ stetig

$\boxed{\text{Def}}$ (X, τ), (Y, ν) heißen homöomorph, wenn
$\exists f: X \to Y$ Homöomorphismus.

Bezeichnung: $X \sim Y$.

Ü: "Ä" Relation.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $(-1,1) \sim \mathbb{R}$ (mit nat. Top. induziert von $|x-y|$)



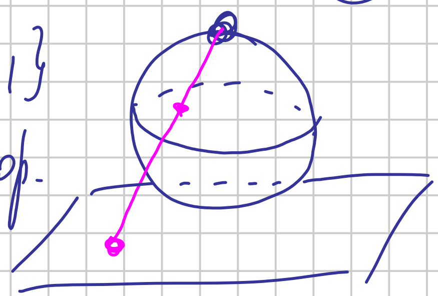
z.B. $f(x) := \frac{x}{1+|x|}$, $f: \mathbb{R} \to (-1,1)$

Natürlich hat man $(-1,1) \sim (a,b)$ $\forall a < b$ Ü

2) Sei $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$

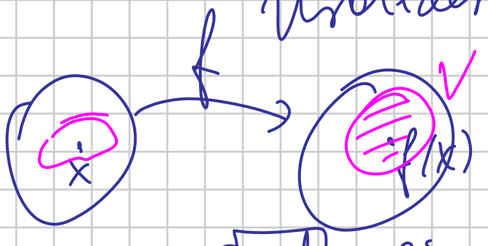
und $X := S^2 \setminus \{0,0,1\}$ mit der eukl. Top.

Ü $X \sim \mathbb{R}^2$ mittels der stereografischen Projektion.



$\boxed{\text{Def}}$ Sei $f: X \to Y$ und $x \in X$. f heißt stetig in x, wenn

Urbilder von Umg. von $f(x)$ Umg. von x enthalten.



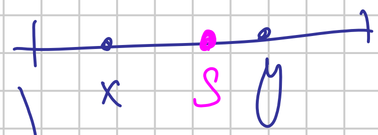
Ü f stetig $\Leftrightarrow$ f stetig in $\forall x \in X$.

Def Ein TR (X, τ) heißt <u>zusammenhängend</u> (zshgd), wenn $\forall U, V \in \tau$,

$$\left.\begin{matrix} U \cup V = X \\ U \cap V = \emptyset \end{matrix}\right\} \Rightarrow (U = \emptyset \text{ oder } V = \emptyset),$$

Bsp 1) $(0,1) \cup (2,3)$ nicht zshgd

2) (a,b) zshgd: Ü (Idee: Seien U, V wie oben, nimm $x \in U$, $y \in V$, OBdA $x < y$ und def. $S := \sup\{t \in U : t < y\}$.)



Satz $f: X \to Y$ stetig, X zshgd $\Rightarrow$ $f(X)$ zshgd

Beweis Ang., $f(X) = U \dot\cup V$, U, V offen. Dann gilt

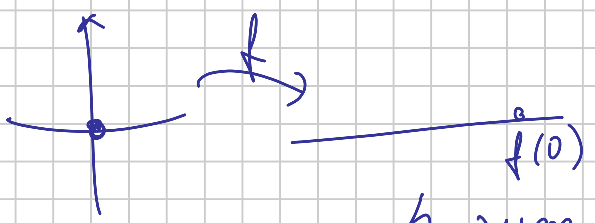
disj. Verein.

$$X = \underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{offen}} \dot\cup f^{-1}(V).$$

X zshgd $\Rightarrow$ $f^{-1}(U) = \emptyset$ oder $f^{-1}(V) = \emptyset$. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $\mathbb{R}$ ist zshgd (analog zu (a,b) oder: $\mathbb{R} \sim (a,b)$)

2) $\mathbb{R} \not\sim \mathbb{R}^2$: Ang., $\exists f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, bij.:



Betr. $X := \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}_{\text{zshgd – warum?}}$, $Y := \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}}_{\text{nicht zshgd}}$

$\lightning$ zum Satz.

Bem. Allgemein gilt: $\mathbb{R}^n \not\sim \mathbb{R}^m$ für $n \neq m$ (ohne Beweis).

Def Sei X eine Menge mit Top. τ_1, τ_2 auf X. τ_1 heißt <u>feiner</u> als τ_2 (und τ_2 heißt <u>gröber</u> als τ_1), wenn

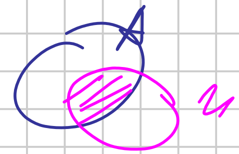
$$\tau_2 \subset \tau_1.$$

<u>Bem.</u> indiskr. Top. $\{\emptyset, X\}$ ist die gröbste Top. auf X und diskr. Top. 2^X die Feinste.

I.2. Grundkonstruktionen

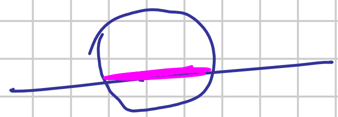
Def Sei (X,τ) TR und $A \subset X$. Die <u>Teilraumtopologie</u> (oder: <u>Unterraumtop.</u>) auf A ist

$$\tau_A := \tau \cap A = \{U \cap A : U \in \tau\}.$$



(ii) τ_A ist eine Top.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ nat. Top.



Es gilt: $\tau_{\mathbb{R}} =$ nat. Top. auf $\mathbb{R}$.

Achtung: $U \subset \mathbb{R}$ nie offen in $\mathbb{R}^2$!

Bem. Die Inklusionsabb. $j: A \to X$ ist stetig bzgl. τ_A und τ (da $j^{-1}(U) = U \cap A$). Außerdem ist τ_A die gröbste Top. auf A s.d. $j: A \to X$ stetig.

$\boxed{\text{Def}}$ Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und (X_α, τ_α) TR, $\alpha \in I$.

Def. $X := \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ und $p_\alpha: X \to X_\alpha$ die Projektion auf die α-te Koord.

Die Produkttopologie τ auf X ist durch die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{\alpha \in F} p_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \begin{array}{l} F \subset I \text{ endlich}, \\ U_\alpha \in \tau_\alpha \; \forall \alpha \in F \end{array} \right\}$$

def. Der Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **Produktraum**.

Bem. $\mathcal{S} := \{ p_\alpha^{-1}(U_\alpha),\ \alpha \in I,\ U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \}$ ist eine Subbasis der Produkttop. „Zylindermengen"

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ mit nat. Top. Die Produkttop. auf $\mathbb{R}$ ist die natürliche Top. (da Produkte von Intervallen $\square$ eine Basis für beide bilden).

2) Wenn I unendl. ist, besteht $\mathcal{B}$ aus Mengen, wo nur endlich viele Koord. eingeschränkt sind (deshalb „Zylinder"):

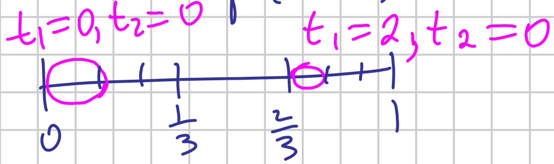
3) Sei $X := \prod_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{0,2\}}_{\text{mit der diskr. Top.}}$

Ü $\underset{\text{Produkttop.}}{(X, \tau)} \sim (\underset{\text{Cantormenge}}{C}, \text{natürl. Top.})$ mittels

$$f((t_1, t_2, \dots)) := \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{9} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n}.$$

(Hinweis: Zeige: Zylinder $\longleftrightarrow$ endl. Vereinigung von triadischen Intervallen der Form $\left(\frac{a}{3^n}, \frac{b}{3^n}\right)$:

z. B. $f(\{t_1, 0, t_3, \dots\}) = C \cap \left([0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]\right)$)



$\boxed{\text{Satz}}$ Seien (X_α, τ_α) TR, $\alpha \in I$, und (X, τ) der Produktraum.

(a) Die Projektionsabb. $p_\alpha : X \to X_\alpha$ sind stetig und offen

(b) τ ist die gröbste Topologie, für die alle p_α stetig sind.

<u>Beweis</u> (a) Sei $U_\alpha \in \tau_\alpha$, dann gilt:

$p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ Zylindermenge $\Rightarrow$ offen in τ.

Also ist p_α stetig.

Sei $U \in \mathcal{B}$, d.h., U eine Zylindermenge.

Basis der Produkttop.

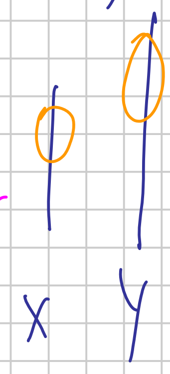
Dann ist $p_\alpha(U) = X_\alpha$ oder $p_\alpha(U) = U_\alpha \in \tau_\alpha$,

d.h., p_α ist offen

(B) : $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ müssen offen sein $(U_\alpha \in \tau_\alpha, \alpha \in I)$,
d.h., τ ist die gröbste solche Top. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Def}}$ Seien (X,τ), (Y,ν) TR. Die Summe von X und Y (oder: disjunkte Vereinigung) ist

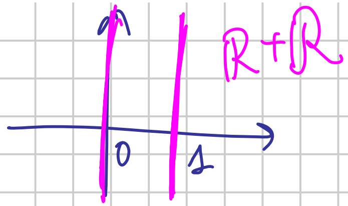
$$X + Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$$



mit $U \subset X+Y$ offen $\iff \begin{cases} p_1(U \cap p_2^{-1}(0)) \in \tau & \text{offen in } X \\ p_1(U \cap p_2^{-1}(1)) \in \nu & \text{offen in } Y \end{cases}$

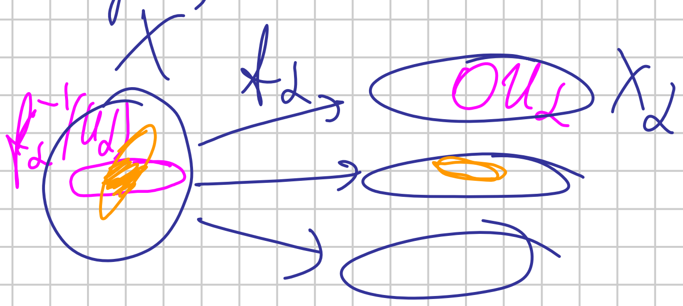
$\iff U = U_1 + U_2$ für $U_1 \in \tau$, $U_2 \in \nu$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\mathbb{R} + \mathbb{R} = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}) \subset \mathbb{R}^2$



Die Summentop. = Teilraumtop. von $\mathbb{R}^2$
(euklidische Top.)

$\boxed{\text{Def.}}$ Seien X eine Menge, I eine Indexmenge, (X_α, τ_α) TR, $\alpha \in I$,
$f_\alpha : X \to X_\alpha$, $\alpha \in I$.



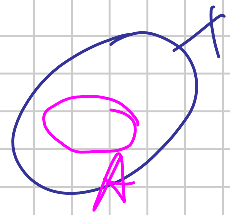
Die Initialtopologie τ auf X ist
die gröbste Top. auf X, für die
jedes f_α stetig ist, d.h., sie hat

$$\mathcal{S} := \{ f_\alpha^{-1}(U_\alpha), \alpha \in I, U_\alpha \in \tau_\alpha \}$$

als Subbasis.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) Die Teilraumtop. auf $A \subset X$ ist die initialtop. für die Inklusion $j: A \to X$

(da $j^{-1}(B) = B \cap A$)



2) Die Produkttop. auf $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ ist die initialtop. für die Projektionen ($p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ sind Zylindermengen)

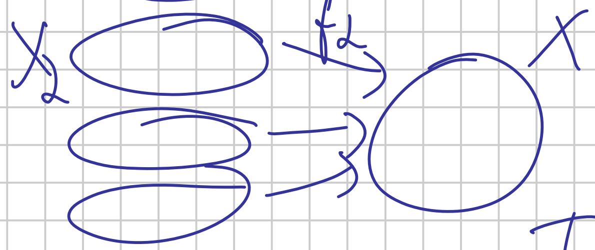
3) Die natürliche Top. auf der Cantormenge C ist die initialtop. (Teilraumtop. von $\mathbb{R}$) für die Inklusionen $j_n: C \hookrightarrow C_n$, $n \in \mathbb{N}$

$C_1 = [0,1]$

$C_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], \ldots$

Dualkonstruktion:

$\boxed{\text{Def}}$ Seien X eine Menge, (X_α, τ_α) TR, $\alpha \in I$, und $f_\alpha : X_\alpha \to X$ $\forall \alpha$.



Die Finaltopologie auf X ist die feinste Topologie, für die alle f_α stetig sind,

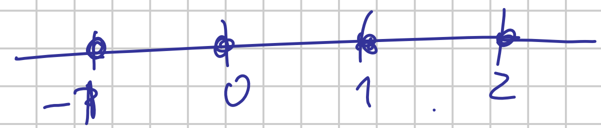
d.h., $U \subset X$ ist offen $\iff$ $f_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha$ $\forall \alpha$, (U)

d.h., $$\tau = \bigcap_{\alpha \in I} \{ U : f_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha \}$$

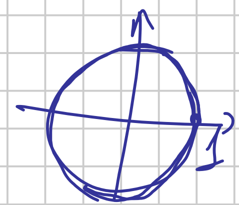
$\boxed{\text{Bsp / Def}}$ Sei (X, τ) TR, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $p: X \to X/_\sim$ die kanonische Abb. $(p(x) := [x])$. Die Quotiententop. ist die Finaltop. auf $X/_\sim$ bzgl. p, d.h.,

$$U \subset X/_\sim \text{ offen} \iff p^{-1}(U) \subset X \text{ offen}.$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\mathbb{R}$ mit $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$



U Der Quotientenraum $\mathbb{R}/_\sim$ ist homöomorph zum Einheitskreis $\mathbb{T}$



II Konvergenz

II.1 Netze

Def Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ eine Folge und $x \in X$. Dann konv. x_n gegen x $\left(x_n \longrightarrow x, \ \lim_{n\to\infty} x_n = x \right)$, wenn:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad x_n \in U.$$

Bsp $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Produkttop. Dann gilt: für $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$

$$f_n \xrightarrow[\text{Produkttop.}]{\text{in der}} f \iff f_n(x) \to f(x) \ \forall x$$

(Umgebungsbasis von f: $\mathcal{U}_{\cancel{n},x_1,\dots,x_n,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} := \{g : \overbrace{|f(x_j)-g(x_j)|<\varepsilon_j}^{g(x_j)\in(f(x_j)-\varepsilon_j,\,f(x_j)+\varepsilon_j)} \ \forall j=1,\dots,k\}$)

Die Produkttop. auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ heißt deshalb die Topologie der punktweisen Konvergenz.

Erinnerung: Seien X, Y metrisch. Dann gelten:

(a) Für $A \subset X$ und $x \in X$

$$x \in \overline{A} \iff \exists (x_n) \subset A \text{ mit } x_n \to x$$

(b) $f: X \to Y$ ist stetig in $x \in X$ $\iff$

$\forall (x_n) \subset X \ (x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x).)$

(Stetigkeit = Folgenstetigkeit)

$\boxed{\text{Prop}}$ Sei (X, τ) TR mit erstem Abzählbarkeitsaxiom, d.h., $\forall x \in X \ \exists$ abz. Umgebungsbasis von x. Dann gelten (a) und (b), d.h., Abschlüsse und Stetigkeit lassen sich mit Konvergenz von Folgen charakterisieren.

<u>Beweis</u> Sei $x \in X$ und (U_n) eine abz. Basis von $\mathcal{U}(x)$.

OBdA: $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \ldots$

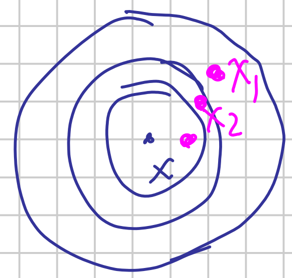
(sonst betr. $V_1 := U_1$, $V_2 := U_2 \cap V_1$, $V_3 := U_3 \cap V_2 \ldots$)

(a) $x \in \overline{A} \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) \ \exists y \in A \cap U$

$\iff \forall n \ \exists x_n \in A \cap U_n$

$\iff \exists (x_n) \subset A$ mit $x_n \to x$

für $\Rightarrow$ benutze $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$



(b) U

„$\blacksquare$“

Bem. Wenn $\mathcal{U}(x)$ keine abz. Basis hat, kann es sein, dass $x_n \to x$ nur im Fall $x_n = x \ \forall n \geq n_0$ passiert („zu viele Umgebungen“)

Für ein Bsp mit sog. Ordinalzahlen siehe Querenburg Bsp 5.3, Seite 74.

Also braucht man Konvergenz von anderen Objekten.

Idee: Nimm andere Indexmengen als $\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Def}}$ Sei I eine Menge und $\preceq$ eine Relation auf I.
I (bzw. $(I, \preceq)$) heißt <u>gerichtet</u>, wenn

(I1) $\alpha \preceq \alpha \quad \forall \alpha \in I$ (Refl.)

(I2) $\alpha_1 \preceq \alpha_2,\ \alpha_2 \preceq \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 \preceq \alpha_3$ (Transit.)

(I3) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in I \quad \exists \alpha_3 \in I$ mit
$\alpha_1 \preceq \alpha_3,\ \alpha_2 \preceq \alpha_3$