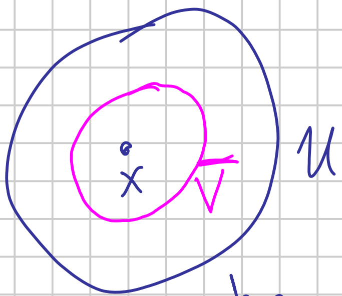
Notiztitel 03.07.2018

Korollar Sei X lokalkomp. Hausdorffraum. Dann gilt:

$\forall x \in X \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{U}(x) \quad \exists V \in \mathfrak{U}(x)$ mit

$$V \subset \overline{V} \subset \mathcal{U}, \quad \overline{V} \text{ komp.}$$



__Beweis__ Sei $x \in X$, $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(x)$. Da X T_3 ist, kann man x und $X \setminus \mathcal{U}$ durch off. Mengen trennen. Insbes. $\exists W \in \mathfrak{U}(x)$ mit $W \subset \overline{W} \subset \mathcal{U}$.

Sei K eine komp. Obermenge einer Umg. $\mathcal{U}_0$ von x.

Dann ist $V := W \cap \mathcal{U}_0 \in \mathfrak{U}(x)$, $\overline{V} \subset \overline{W} \subset \mathcal{U}$,

und $V \subset \overline{V} \subset \overline{U_0} \subseteq K$,   da K abg. (X Hausdorff)

d.h., $\overline{V}$ ist komp. (als abg. Teilmenge von K) $\blacksquare$

Bem. D.h., $\forall x$ $\exists$ Umgebungsbasis mit komp. Abschluss.

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Falsch i.A. ohne Hausdorffeigenschaft).

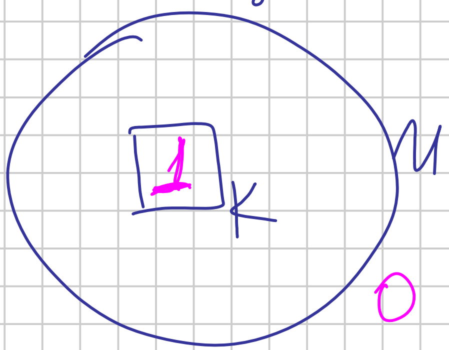
$X := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, abg. Mengen sind:

X, $\emptyset$, $A \subset X$, sobald $\infty \in A$ und A höchstens abz.

Ü Topologie, X komp., aber $\mathbb{R}$ enthält keine komp. Obermenge einer Umg. $\forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Thm}}$ (<u>Urysohns Lemma für lokalkomp. Räume</u>)

Sei X lokalkom., Hausdorff, $K \subset X$ komp., $\mathcal{U} \supset K$ offen.



Dann $\exists$ stetige Fkt $f: X \to [0,1]$ mit komp. Träger mit

$$f\big|_K \equiv 1, \quad \operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}.$$

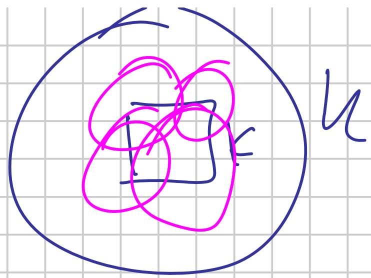
<u>Bem.</u> D.h., man kann komp. Mengen von abg. Mengen durch stet. Fkt'en trennen. Da $\forall \{x\}$ komp. ist (Warum?), ist X insb. vollständig regulär $(T_{3a} + T_1)$

<u>Beweis des Thms</u>

Kollorar oben: $\forall x \in K \; \exists V_x \in \mathcal{U}(x)$ mit

$$x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset \mathcal{U}, \quad \overline{V_x} \text{ komp.}$$

Da $(V_x)_{x \in K}$ eine off. Überd. von K ist, $\exists\, V_{x_1}, \dots, V_{x_n}$ eine Teilüberd. von K. Daraus folgt:



$$K \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n} \subset \overline{V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}}$$

$$\overset{\text{Warum?}}{=} \underbrace{\overline{V_{x_1}} \cup \dots \cup \overline{V_{x_n}}}_{\text{komp. (warum?)}} \subset U .$$

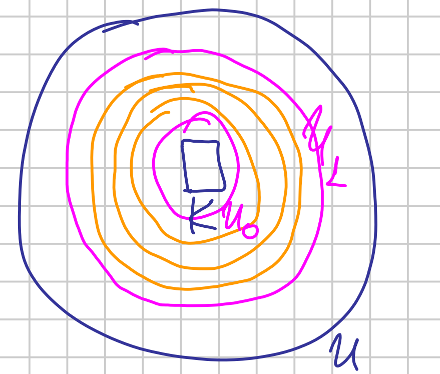
Wir haben die folgende <u>Beobachtung</u> bewiesen:

$$K \subset U,\ K \text{ komp.},\ U \text{ offen} \Rightarrow \exists V \text{ offen mit}$$

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U,\ \overline{V} \text{ komp.}$$

Wie im Beweis des klassischen Urysohn(s) konstruiere induktiv

$\left(\mathcal{U}_{\frac{p}{2^n}}\right)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ p\leq 2^n}}$ mit:



$$K\subset\mathcal{U}_0\subset\overline{\mathcal{U}_0}\subset\mathcal{U}_{r_1}\subset\overline{\mathcal{U}_{r_1}}\subset\mathcal{U}_{r_2}\subset\overline{\mathcal{U}_{r_2}}\subset\mathcal{U}_1\subset\overline{\mathcal{U}_1}\subset\mathcal{U}$$

$\forall\, r_1<r_2$ dyadisch in $[0,1]$, s.d. $\forall\,\overline{\mathcal{U}_r}$ komp. ist.

Def. weiterhin $\tilde{f}(x)=\inf\{t\in[0,1]: x\in\mathcal{U}_t\}$ für $x\in\mathcal{U}_1$ und $\tilde{f}=0$ sonst. Wie früher ist $\tilde{f}:X\to[0,1]$ stetig, $\tilde{f}|_K=0$, $\tilde{f}|_{X\setminus\mathcal{U}_1}=1$

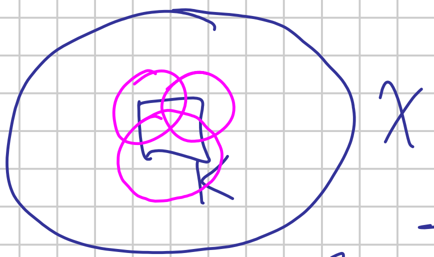
Def. $f:=1-\tilde{f}: X\to[0,1]$, stetig, $f|_K=1$, $f|_{X\setminus\mathcal{U}_1}=0$

Da $\overline{\mathcal{U}_1}\subset\mathcal{U}$, $\operatorname{supp} f\subset\overline{\mathcal{U}_1}$, $\overline{\mathcal{U}_1}$ komp. $\Rightarrow$ $\operatorname{supp} f\subset\mathcal{U}$ komp. ■

Satz (Partition der Eins für lokalkomp. Räume)

Sei X lokalkomp., Hausdorff, $K \subset X$ komp., $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ eine off. Überdeckung von K. Dann $\exists f_1, \dots, f_n : X \to [0,1]$ stetig, mit komp. Träger mit $\operatorname{supp} f_j \subset \mathcal{U}_j \ \forall j$ und

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x) = 1 \quad \forall x \in K$$



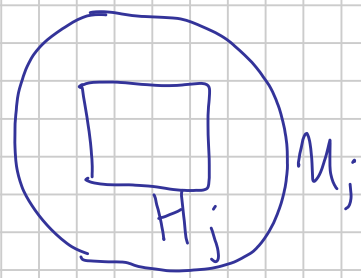
Beweis Sei $x \in K$, j mit $x \in \mathcal{U}_j$. Wir wissen:

$\exists V_x \in \mathcal{U}(x)$ mit $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset \mathcal{U}_j$, $\overline{V_x}$ komp.

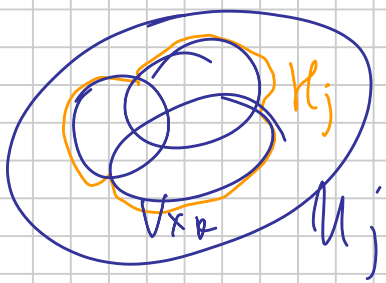
X komp. $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_m$ mit

$$K \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}.$$

Def.



Def.



$$H_j := \bigcup_{x_k \in U_j} \overline{V}_{x_k} \quad \text{– komp.}$$ (endl. Verein. von komp. Mengen)

Urysohn: $\exists$ stetige $g_1, \ldots, g_n : X \to [0,1]$ mit

$$g_j\big|_{H_j} \equiv 1, \quad \underbrace{\operatorname{supp} g_j}_{\text{komp.}} \subset U_j \quad \forall j.$$

$$f_1 := g_1$$

$$f_2 := (1 - g_1) \cdot g_2$$

$$f_3 := (1-g_1) \cdot (1-g_2) \cdot g_3$$

$$\vdots$$

$$f_n := (1-g_1) \cdot (1-g_2) \cdot \ldots \cdot (1-g_{n-1})\, g_n$$

- $\operatorname{supp} f_j \subset \underbrace{\operatorname{supp} g_j}_{\text{komp.}} \subset U_j$ komp. $\forall j$.
- $f_1 + f_2 + \dots + f_j = 1 - (1-g_1)\cdot(1-g_2)\cdot\ldots\cdot(1-g_j) \quad \forall j$:

  $j = 1$: $f_1 = 1 - (1-g_1) = g_1$ ✓

  $j \rightsquigarrow j+1$: $\underbrace{f_1 + \dots + f_j}_{IV} + f_{j+1} = 1 - (1-g_1)\cdot\ldots\cdot(1-g_j) + (1-g_1)\cdot\ldots\cdot(1-g_j)g_{j+1}$

  $= 1 - ((1-g_1)\cdot\ldots\cdot(1-g_j)(1-g_{j+1}))$. ✓

Da $\forall x \in K \ \exists V_{x_k}$ mit $x \in V_{x_k}$ (überd.),

und $g_j|_{H_j} = 1$ für j mit $V_{x_k} \subset U_j$, gilt:

$$f_1 + \dots + f_n = 1 \text{ auf } K.$$

■

<u>Frage</u>: Wann überträgt sich lok. Komp.?

Bem. 1) X lok. komp., $A \subset X$ abg. $\Rightarrow$ (A, τ_A) lok. komp. Ü

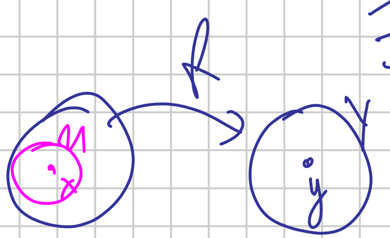
2) Falsch i. A.:

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ nicht lok. komp. (Warum?)

sogar Hausdorff!

$\boxed{\text{Lemma}}$ Seien X lok. komp., Y top. Raum, $f: X \to Y$ stetig und offen. Dann ist $f(X)$ lok. komp.

Beweis Sei $y \in f(X)$, $x \in X$ mit $f(x) = y$. Nach Voraus. $\exists\, U \in \mathcal{U}(x)$, $K \supset U$ komp. Dann gilt:



$$y = f(x) \in \underbrace{f(U)}_{\text{offen, da } f \text{ off.}} \subset \underbrace{f(K)}_{\text{komp.}}$$

∎

$\boxed{\text{Satz}}$ (Tychonoff für lokalkomp. Räume)

Seien $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in I}$ top. Räume und $X = \prod_\alpha X_\alpha$ mit Produkttop.

Dann gilt:

$$X \text{ lokalkomp.} \iff \begin{cases} \forall X_\alpha \text{ lokalkomp.}, \\ \text{höchstens endlich viele } X_\alpha \text{ sind nicht komp.} \end{cases}$$

__Beweis__ "$\Rightarrow$" Da $\forall \pi_\alpha : X \to X_\alpha$, $(x_\alpha)_\alpha \mapsto x_\alpha$ stetig, surj und offen ist, ist $\forall X_\alpha$ lok. komp. (Lemma davor)

warum?

Sei $x \in X$. Dann $\exists$ oBdA eine Zylindermenge $U \in \mathcal{U}(x)$ und $K \supset U$ komp. Dann gilt $\forall \alpha$ bis auf endlich viele:

$$X_\alpha = \pi_\alpha(U) = \underbrace{\pi_\alpha(K)}_{\text{komp.!}} \quad - \text{komp.}$$

$\Leftarrow$ Sei $x = (x_\alpha) \in X$, $U \in \mathcal{U}(x)$ eine Zylindermenge mit Einschränkungen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, s.d. X_α komp. $\forall \alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

Da $X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_n}$ lokalkomp. sind, $\exists K_1, \dots K_n$ komp. mit

$$\pi_{\alpha_j}(U) \subset K_{\alpha_j}, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

(Verkleinere $\pi_{\alpha_j}(U)$, wenn nötig).

Dann ist $\prod_{\alpha \in I} K_\alpha$, wobei $K_\alpha := X_\alpha$ für $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, eine komp. Obermenge von U.

klass. Tychonoff.

$\boxed{\text{Thm}}$ (Satz von Baire für lokalkomp. Räume)

Sei X lokalkomp. Hausdorffraum, $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ Folge offener dichter Teilmengen von X. Dann ist

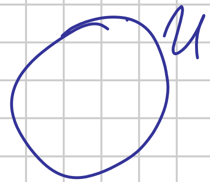
$$G := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

dicht in X.

Bem. Räume mit dieser Eigenschaft ($\forall (G_n)_{n=1}^{\infty}$ ----) heißen Baire-Räume. Anderes Bsp.: vollst. metr. Räume (FA1).

Beweis des Thms

Sei $\mathcal{U} \neq \emptyset$ offen. z.z.: $G \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.



Def. $(\mathcal{U}_n)_{n=0}^{\infty}$ induktiv:

- $\mathcal{U}_0 := \mathcal{U}$

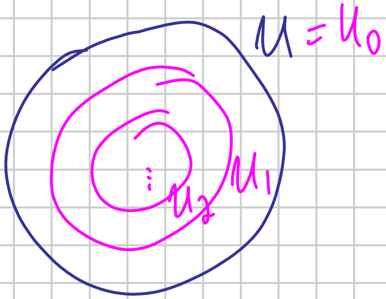
- $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n$ seien def. Dann ist

$$\underbrace{G_{n+1}}_{\text{dicht, offen}} \cap \underbrace{\mathcal{U}_n}_{\text{offen}} \neq \emptyset, \text{ offen. Nimm ein } x \in G_{n+1} \cap \mathcal{U}_n.$$

Wir wissen (X lokalkomp., hausd.): $\exists\, \mathcal{U}_{n+1} \in \mathcal{V}(x)$ offen

mit

$$x \in \mathcal{U}_{n+1} \subset \underbrace{\overline{\mathcal{U}_{n+1}}}_{\text{komp.}} \subset G_{n+1} \cap \mathcal{U}_n$$



Da $\overline{\mathcal{U}_n} \searrow$, haben je endlich viele Glieder von $(\overline{\mathcal{U}_n})$ nichtleeren Durchschnitt. Da $\overline{\mathcal{U}_1}$ komp. ist,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{U}_n} \neq \emptyset$$

Da $\overline{\mathcal{U}_n} \subset G_n$ und $\overline{\mathcal{U}_1} \subset G_1 \cap \mathcal{U}_0 = G_1 \cap \mathcal{U}$, gilt

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \subseteq U \cap \underbrace{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right)}_{G} = U \cap G.$$

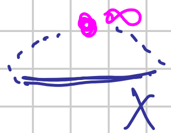
Also ist G dicht. $\blacksquare$

3. Kompaktifizierungen

Was wenn X nicht komp. ist?

$\boxed{\text{Def}}$ Seien X, Y top. Räume. Dann heißt Y eine Kompaktifizierung von X, wenn Y komp. und X homöomorph zu einer dichten Teilmenge von Y ist, d.h., Y komp. und $\exists\, i: X \to Y$ stetig, inj, offen (als $i: X \to \underbrace{i(X)}_{\text{mit induz. Top.}}$) mit $\overline{i(X)} = Y$.

$\boxed{\text{Def}}$ Sei (X, τ) nicht komp. top. Raum. Sei $\infty \notin X$ und def.



$$X^* := X \cup \{\infty\}$$

mit $\tau^* := \tau \cup \{X^* \setminus A : A \subset X \text{ abg., komp. in } (X,\tau)\}$

Der Raum (X^*, τ^*) heißt Alexandroff-Einpunkt-Kompaktifizierung von (X,τ).

Ü (X^*, τ^*) ist top. Raum.

$\boxed{\text{Prop}}$ 1) (X^*, τ^*) ist eine Kompaktifizierung von (X,τ)

2) (X^*, τ^*) ist Hausdorff $\Longleftrightarrow$ (X,τ) Hausdorff und lokal komp.

Beweis 1) • X^* komp.: Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine off. Überd. von X^*.

$\exists \alpha_0 : \infty \in U_{\alpha_0} = X^* \setminus A_0$, A_0 komp. Da $(U_\alpha)_{\alpha \neq \alpha_0}$ A_0 überdecken,

$\exists$ endl. Teilüberd. von A_0 $\Longrightarrow$ endl. Überd. von X^* (nimm U_{α_0} wieder dazu)

• z.z.: $X \sim$ dichten Teilm. von X^*.

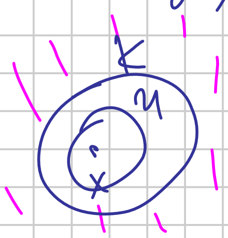
Betr. $id: X \to X^*$

- id ist inj, offen (da $\tau \subset \tau^*$)
- id stetig: Für $U \in \tau^* \setminus \tau$, d.h., $U = X^* \setminus A$, komp., abg. in X
  damit $id^{-1}(U) = X \setminus A \in \tau$
- $id(X) = X$ dicht in X^*:
  Sei $U \subset X^*$ offen, $\neq \emptyset$
  $U \subset X \Rightarrow U \cap X \neq \emptyset$
  $\infty \in U \Rightarrow U = X^* \setminus A$. Da X nicht komp.,
  komp $\subset X$ muss $U \cap X \neq \emptyset$.

2) ($\Leftarrow$) zz: $\forall x \in X$ kann man von ∞ trennen

Sei $x \in X$. X lokal komp. $\Rightarrow \exists \underset{\in\tau}{U} \in \mathcal{U}(x)$, $\underset{X}{K \supset} \overline{U}$ komp. ($\Rightarrow$ abg., da X Hausdorff.)

Also ist $X^* \setminus K$ offen in X^*, Umg. von ∞, disj. von U.



"$\Rightarrow$" X Hausdorff (ii)

Z.z.: X lokalkomp.

Da X^* Hausdorff, ist $\{\infty\}$ abg., d.h., $X \subset X^*$ offen

Sei $x \in X$. Wir wissen: (X^* komp. und insb. lokalkomp.)

$$\exists \underset{\subset X}{V} \text{ offen in } X^* : \quad x \in V \subset \underbrace{\overline{V}}_{\text{komp. in } X^*} \subset X$$

Da $V \subset X$, muss $V \in \tilde{\tau}$ gelten. Wir zeigen: $\overline{V}$ ist komp. in X:

Sei (U_α) off. Überd. von $\overline{V}$ in X. Da $\tilde{\tau} \subset \tau^*$ und $\overline{V}$ komp. bzgl. τ^*, $\exists$ endl. Teilüberd.

$\Rightarrow X$ lokalkomp. ∎

Bem. Wir wissen: X^* komp. $\Rightarrow \forall$ Ultrafilter in X^* konv.

Daraus folgt: $\forall$ nichtkonv. Ultrafilter in X konv. gegen ∞

(erweitere $\mathcal{F}$ zu einem Ultrafilter in X^*)

Frage: Finde eine Hausdorffsche Kompaktifizierung von X, mit mehr Freiheit für die Konv. von Ultrafiltern/Netzen/Folgen, die in X nicht konv.

Def Eine Kompaktif. βX eines top. Raumes X heißt Stone–Čech-Kompaktifizierung von X, wenn $\forall$ komp. Hausdorffraum Y $\forall$ stet. $f: X \to Y$ $\exists!$ $\bar{f}: \beta X \to Y$ stetig s.d. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

— universelle Eigenschaft von βX

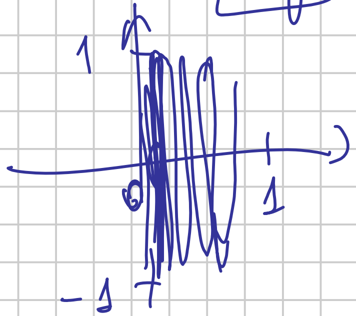
komm. (d.h. $f = i \circ \bar{f}$)

Bem. 1) D.h., βX ist eine „maximale" Hausdorffsche Kompaktif. von X, so dass $\forall$ andere Kompaktif. ein Quotientenraum von βX ist (Ü)

2) Alexandroff-Komp. $\neq \beta X$ i.A.:

$\boxed{\text{Bsp}}$ $X = (0,1]$, $f: X \to [-1,1] =: Y$ mit

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$



f lässt sich nicht auf die Einpunktkomp. $X^* := \underbrace{[0,1]}_{\text{mit Top. } \tau^*}$ von $(0,1]$ stetig fortsetzen (Warum?)

Frage: Wann $\exists \beta X$?

(Ü) X komp. Hausd. $\Rightarrow \beta(X) = X$

$\boxed{\text{Satz}}$ $\exists\, \beta X \iff X$ vollst. regulär $(T_{3a} + T_1)$

In diesem Fall ist βX eindeutig bis auf Homöomorphismus.

Beweisidee Eindeutigkeit: Ü

$\exists$! $\Rightarrow$ βX komp. $\Rightarrow$ normal (Urysohn) $\Rightarrow$ vollst. regulär

$\overset{\text{Ü}}{\Rightarrow}$ $i(X)$ vollst. regulär als Teilraum

$\overset{\text{Ü}}{\Rightarrow}$ X vollst. regulär.

$\Leftarrow$ Def. $C(X) := C(X, \underbrace{[0,1]}_{\text{eukl. Top.}})$ - alle stet. $f: X \to [0,1]$.

und $\tilde{X} := [0,1]^{C(X)} = \prod_{f \in C(X)} [0,1]$ - komp., Hausdorff

- Tychonoff-Kubus

Betr. $\forall x \in X$

$$h_x : C(X) \to [0,1], \quad f \mapsto f(x)$$ (Punktausw. in x)

$\forall x$ gilt $h_x \in \tilde{X}$. Betr.

$$i : X \to [0,1]^{C(X)}, \quad x \mapsto h_x$$

und $\beta X := \overline{i(X)} \subset \tilde{X}$ – komp., Hausdorff

Ü

- i inj ($x_1 \neq x_2 \overset{T_{3a}}{\Rightarrow} \exists f \in C(X) : f(x_1) = 0,\ f(x_2) = 1 \Rightarrow h_{x_1} \neq h_{x_2}$)
- i offen, stetig.

ZZ: universelle Eigenschaft:

Sei Y komp. Hausdorff, $f : X \to Y$ stetig. Es gilt: $\beta Y = Y$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \beta(X) \arrow[d, dashed] \arrow[r, phantom, "\subset"] & {[0,1]^{C(X)}} \arrow[d, "P"] \\
& Y \arrow[r, "i_Y"] & {[0,1]^{C(Y)}}
\end{tikzcd}$$

Def. $P : [0,1]^{C(X)} \longrightarrow [0,1]^{C(Y)}$ durch

$$P\left(\left(X_\alpha\right)_{\alpha \in C(X)}\right) := \left(X_{\underbrace{\beta \circ f}_{\beta \circ f : X \to \mathbb{C}}} \right)_{\beta \in C(Y)}$$

und überprüfe: $\bar{f} := i_Y^{-1} \circ P|_{\beta(X)}$ ist die gewünschte Fkt $: \beta X \to Y$ $\blacksquare$
Leider keine Zeit.

<u>Bem.</u> Da lokalkomp. Hausdorffräume vollst. regulär sind, $\exists\, \beta X$ für solche Räume, insb. für $\forall$ diskreten Raum.

Ü 1) Zeige: $|\beta\mathbb{N}| = |[0,1]^{[0,1]}|$

2) X ist offen in $\beta X \Leftrightarrow X$ lokal komp.

$\boxed{\text{Bsp}}$ ($\beta\mathbb{N}$)

Es gilt: $\beta\mathbb{N} \cong \{\mathcal{F} \text{ Ultrafilter auf } \mathbb{N}\}$ mit Stone-Topologie

mit Basis $\{\mathcal{F} \in \mathrm{Ult}(\mathbb{N}) : U \in \mathcal{F}\}$, $U \subset \mathbb{N}$

Man zeigt: $(\mathrm{Ult}(\mathbb{N}), \tau)$ komp., Hausdorff mit univ. Eigenschaft

bzgl. $i : x \mapsto \mathcal{F}_x$ – fixierter Ultr.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Ult}(X) \arrow[d, dashed] \\ & Y \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F} \mapsto \lim f(\mathcal{F})$

Ü

Dieselbe Konstr. funktioniert $\forall$ diskr. Räume $(\mathbb{Z}, \mathbb{N}^d, \mathbb{Z}^d, \dots)$ und kann $\forall$ lokalkomp. Hausdorffr. (sogar $\forall$ vollst. regul. Räume) erweitert werden.

Eigenschaften von $\beta\mathbb{N}$ (ohne Beweis)

- $\beta\mathbb{N}$ ist total unzusammenhängend ($\forall$ zusammenh. Komponen ist einpunktig)
  (insb.: $\overline{U}^{\beta\mathbb{N}} = \{\mathcal{F} : U \in \mathcal{F}\}$)
- $|\beta\mathbb{N}| = |[0,1]^{[0,1]}| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$
- $\ell^\infty(\mathbb{N}) \simeq C(\beta\mathbb{N})$

Sei $(a_n) \in \ell^\infty$, $a : \mathbb{N} \to B_r(0) \subset \mathbb{C}$ stetig (abg. Ball)
Univers. Eigenschaft: $\exists!$ stet. Forts. $\beta a : \beta\mathbb{N} \to \mathbb{C}$,
$(a_n) \mapsto \beta a \in C(\beta\mathbb{N})$

(ii) $\beta: \ell^\infty(\mathbb{N}) \to C(\beta\mathbb{N})$ ist homöo.

Insb. gilt:

$$(\ell^\infty(\mathbb{N}))' = \mathcal{B}(\beta\mathbb{N})$$

Borelmaße

- $\beta\mathbb{N}$ erbt die Halbgruppenstrukturen von $\mathbb{N}$

Das liefert analytische Beweise zu additiven Sätzen aus Zahlentheorie, z. B.:

$\boxed{\text{Satz}}$ (Van der Waerden)

$\mathbb{N} = C_1 \cup \dots \cup C_r \Rightarrow \exists r: C_r$ enthält beliebig lange arithm. Progressionen $a, a+n, \dots, a+kn$

$\boxed{\text{Satz}}$ (Hindman)

$\mathbb{N} = C_1 \cup \dots \cup C_r \Rightarrow \exists r: C_r \supset \left\{ a_{n_1} + \dots + a_{n_k}, k \in \mathbb{N}, n_1 < n_2 < \dots < n_k \right\}$

für eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{N}$?