Das Lebesgue-Integral

Skript zur Vorlesung von Professor K.-D. Kürsten
nach dessen Vorlesungsskript

Eingabe in Latex durch:
Hannes Nagel, Thomas Meissner, Alexander Lajn, Bela Bauer,
Martin Lange, K.-D. Kürsten

4. August 2005

0.1 Das Lebesgue-Integral

0.1.a) Begriff des Maßes

Definition Ein nichtleeres System Σ von Teilmengen einer nichtleeren Menge X heißt Mengenalgebra, wenn

$$1. \quad M \in \Sigma \Longrightarrow X \setminus M \in \Sigma$$

$$2. \quad M_1, M_2 \in \Sigma \Longrightarrow M_1 \cup M_2 \in \Sigma$$

Gilt zusätzlich

$$3. \quad \text{Für jede Folge } (M_j)_{j=1}^{\infty} \text{ mit } M_j \in \Sigma \text{ gilt } \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \in \Sigma$$

so heißt Σ σ-Algebra von Mengen.

Mengenalgebra

- $M_1 \cap M_2 = X \setminus ((X \setminus M_1) \cup (X \setminus M_2))$
- $M_1 \setminus M_2 = M_1 \cap (X \setminus M_2)$
- $\emptyset = M \cap (X \setminus M)$
- $X = X \setminus \emptyset$

Die entstandenen Mengen sind dabei Elemente der Mengenalgebra Σ, falls $M_1, M_2 \in \Sigma$.

- $M_1 \cup M_2 = M_1 \cup (M_2 \setminus M_1)$ (disjunkte Vereinigung).

σ-Algebra

- Die Vereinigung $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j$ lässt sich als Vereinigung disjunkter Mengen $M_1 \bigcup \bigcup\limits_{j=2}^{\infty} \left(M_j \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{j-1} M_k \right)$ schreiben.

- Ferner ist der unendliche Durchschnitt $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} M_j = X \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (X \setminus M_j)$ einer Folge (M_j) von Elementen von Σ wieder ein Element von Σ.

Bemerkung (Unwichtig für den Kurs, aber in der Literatur oft verwendet) Die vom System der offenen Teilmengen eines metrischen Raumes X erzeugte σ-Algebra (d.h. die kleinste σ-Algebra auf X, die alle offenen Mengen enthält) heißt Borelsche σ-Algebra. Ihre Elemente nennt man Borel-Mengen.

Definition Sei Σ eine Mengenalgebra auf X. Eine Abbildung $\mu : \Sigma \to [0, \infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ heißt <u>endlich additives Maß</u>, falls $\mu(\emptyset) = 0$ gilt und falls für $M_1, M_2 \in \Sigma$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ stets gilt $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$. Gilt darüber hinaus für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ in Σ mit $M = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j \in \Sigma$ die Gleichung $\mu(M) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(M_j)$, so heißt die Abbildung μ ein σ-additives Maß (oder einfach nur Maß).

Definition Ein Maßraum ist ein Tripel (X, Σ, μ), wobei X eine nichtleere Menge, Σ eine σ-Algebra auf X und μ ein σ-additives Maß auf Σ ist.

Definition Ein Maß heißt <u>endlich</u>, wenn $\mu(X) < \infty$.
Ein Maß heißt <u>σ-endlich</u>, wenn eine Folge $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ in Σ mit $\mu(A_k) < \infty$ und $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ existiert.
Ein Maßraum (X, Σ, μ) mit $\mu(X) = 1$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

Terminologie für Wahrscheinlichkeitstheorie

- Elemente von X – Elementarereignisse
- Elemente von Σ – Ereignisse
- $\mu(M) = P(M)$ - Wahrscheinlichkeit, dass Ereigniss $M \in \Sigma$ bei einem Versuch eintritt

Beispiel 1 $X = \{1, ..., 6\}$, Σ – System aller Teilmengen von X,
$\mu(M) = P(M) = \frac{1}{6} \times$ Anzahl der Elemente von M

Beispiel 2 (Zählmaß)
$X \neq \emptyset$ sei eine Menge, Σ sei das System aller Teilmengen von X, $\mu(M)$ = Anzahl der Elemente von M

Beispiel 3 (etwas patologisch und unnütz) $X = \mathbb{R}$, Σ System aller Teilmengen

$$\mu(M) = \begin{cases} 0 & \text{falls } M \text{ endlich oder abzählbar unendlich} \\ \infty & \text{falls } M \text{ überabzählbar} \end{cases}$$

Dieses Maß ist σ-additiv, aber nicht σ-endlich.
Modifikation:

$$\mu(M) = \begin{cases} 0 & \text{falls } M \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } M \text{ unendlich} \end{cases}$$

Dies ist ein endlich additives, nicht σ-additives Maß.

Beispiel 4 (Ermöglicht die Konstruktion des Lebesgue-Stiltjes Maßes und als Spezialfall das Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$)

$X = \mathbb{R}$

Für $a < b$ bezeichne $Q_{a,b} = (a, b] = \{x \in R, a < x \leq b\}$ das links offene halboffene Intervall. Dabei ist $a = -\infty$ oder $b = \infty$ erlaubt und es gilt $(a, \infty] = (a, \infty)$.

Σ_0 bestehe aus der leeren Menge und aus allen endlichen Vereinigungen solcher links offenen halb offenen Intervalle. Sind $a < b$ endlich, so gilt $\mathbb{R} \setminus (a, b] = (-\infty, a] \cup (b, \infty)$. Komplementärmengen unbeschränkter Intervalle $(a, b]$ gehören auch zu Σ_0, so dass Σ_0 eine Mengenalgebra ist. Darüberhinaus hat jedes $M \in \Sigma_0$ mit $M \neq \emptyset$ eine Darstellung $M = \bigcup_{j=1}^{m} (a_j, b_j]$ mit paarweise disjunkten Intervallen $(a_j, b_j]$.

Bezeichne $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine rechtsseitig stetige monoton wachsende Funktion und sei $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$, $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x)$.
Wir setzen $\mu_0(\emptyset) = 0$ und $\mu_0((a, b]) = F(b) - F(a)$. Dabei ist z. B. $x - (-\infty) = +\infty$ zu nehmen. Ist $M = \bigcup_{j=1}^{l} Q_j$ endliche disjunkte Vereinigung links offener halb offener Intervalle, so setzen wir $\mu_0(M) = \sum_{j=1}^{l} \mu_0(Q_j)$.

Im Spezialfall $F(x) = x$ ist $\mu_0(M) = \int \chi_M \,\mathrm{d}\, x$, falls M beschränkt ist, bzw. $\mu(M) = \infty$ falls M unbeschränkt ist. Somit folgt aus den Eigenschaften des eindimensionalen Riemann-Integrals, dass μ_0 ein wohldefiniertes endlich additives Maß ist.
Sonst muss die endliche Additivität noch genauer überprüft werden. Dazu zeigt man, dass sich der Wert $\mu_0(M) = \sum \mu_0(Q_j)$ nicht ändert, wenn man die Q_j durch Einfügung endlich vieler neuer Teilungspunkte in kleinere links offene halb offene Intervalle zerlegt. Wohldefiniertheit folgt dann daraus, dass man für zwei Darstellungen derselben Menge eine gemeinsame Verfeinerung finden kann. Die endliche Additivität ist dann eine unmittelbare Folge der Definition von μ_0.

Nachweis der σ-Additivität
Zunächst ist jedes endlich additive Maß monoton, d.h. aus $M \subset \tilde{M}$ mit $M, \tilde{M} \in \Sigma_0$ folgt $\mu_0(M) \leq \mu_0(\tilde{M})$, weil $\mu_0(\tilde{M}) = \mu_0(M) + \mu_0(\tilde{M} \setminus M)$.
Seien nun Mengen M, M_j aus Σ_0 so gewählt, dass $M = \bigcup_{l=1}^{m} Q_{a_l,b_l} = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ gilt, wobei es sich jeweils um disjunkte Vereinigungen handle. Aus $M \supset \bigcup_{j=1}^{k} M_j$ folgt wegen der Monotonie $\mu_0(M) \geq \mu_0(\bigcup_{j=1}^{k} M_j) = \sum_{j=1}^{k} \mu_0(M_j)$, also $\mu_0(M) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j)$.

Zum Nachweis der umgekehrten Ungleichung sei $\varepsilon > 0$ beliebig festgelegt. Wir wählen $\varepsilon_j > 0$ mit $\sum \varepsilon_j < \varepsilon$ (z.B. $\varepsilon_j = 4^{-j}\varepsilon$). Außerdem können wir annehmen, dass $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j) < \infty$ ist, da sonst nichts zu beweisen ist.
M_j sind (falls nichtleer) als endliche Vereinigungen von paarweise disjunkten links offenen halboffenen Intervallen darstellbar, wobei das Maß additiv ist. Somit ist M die Vereinigung aller solcher in den Darstellungen der M_j vorkommenden Intervalle. Man kann also gleich annehmen, dass M_j paarweise disjunkte links offene halboffene Intervalle $M_j = (c_j, d_j]$ sind.

Betrachten erst den Fall $F(a_l) > -\infty$, $F(b_l) < \infty$. Für jedes l findet man $\tilde{a}_l$ mit $a_l < \tilde{a}_l < b_l$ und $F(\tilde{a}_l) - F(a_l) < \frac{\varepsilon}{2m}$. Ist eines der b_l gleich ∞, so findet man $\tilde{b}_l \in (\tilde{a}_l, b_l)$ mit $F(\infty) - F(\tilde{b}_l) < \frac{\varepsilon}{2m}$. Ansonsten setzt man $\tilde{b}_l = b_l$ Weiter findet man im Falle $d_j < \infty$ ein $\tilde{d}_j$ mit $d_j < \tilde{d}_j$ und $F(\tilde{d}_j) - F(d_j) < \varepsilon_j$. Im Falle $d_j = \infty$ setzt man $\tilde{d}_j = \infty$
Nun ist $\bigcup_{j=1}^{\infty}(c_j, \tilde{d}_j)$ offene Überdeckung der kompakten Menge $\bigcup_{l=1}^{m}[\tilde{a}_l, \tilde{b}_l]$. Wir können eine endliche Überdeckung $\bigcup_{j=1}^{k}(c_j, \tilde{d}_j)$ auswählen. Also folgt
$\mu_0(\bigcup\limits_{l=1}^{m}(a_l, b_l]) - \varepsilon = -\varepsilon + \sum\limits_{l=1}^{m}(F(b_l) - F(a_l)) \leq \sum\limits_{l=1}^{m}(F(\tilde{b}_l) - F(\tilde{a}_l)) = \mu_0(\bigcup\limits_{l=1}^{m}(\tilde{a}_l, \tilde{b}_l]) \leq \mu_0(\bigcup\limits_{j=1}^{k}(c_j, \tilde{d}_j]) \leq \sum\limits_{j=1}^{k} \mu_0((c_j, \tilde{d}_j]) = \sum\limits_{j=1}^{k}(F(\tilde{d}_j) - F(c_j)) \leq \sum\limits_{j=1}^{k}(F(d_j) - F(c_j) + \varepsilon_j) = \sum\limits_{j=1}^{k} \mu_0(M_j) + \sum\limits_{j=1}^{k} \varepsilon_j \leq \varepsilon + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j)$, d.h. $\mu_0(M) - \varepsilon \leq \varepsilon + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j)$.
Für $\varepsilon \to 0$ folgt nun die behauptete Ungleichung $\mu_0(M) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j)$.

Wäre $a_l = -\infty$, $F(a_l) = -\infty$, so könnte $\tilde{a}_l \in (a_l, b_l)$ mit $F(b_l) - F(\tilde{a}_l) > \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j) + 3\varepsilon$ gewählt werden. Ebenso könnte im Falle $b_l = \infty$, $F(b_l) = \infty$ ein $\tilde{b}_l \in (a_l, b_l)$ mit $F(\tilde{b}_l) - F(a_l) > \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j) + 3\varepsilon$ gewählt werden. In beiden Fällen läge also in M ein beschränktes Intervall $(a, b]$ mit $\mu_0((a, b]) > \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j) + 3\varepsilon$. Durch Anwendung des bereits bewiesenen Falles mit $(a, b]$ anstelle M und $(a, b] \cap M_j$ anstelle M_j erhielte man also einen Widerspruch, woraus folgt dass die Fälle $F(a_l) = -\infty$ bzw. $F(b_l) = \infty$ unter den bestehenden Voraussetzungen gar nicht auftreten können.

Beispiel 5 (Ermöglicht Konstruktion des n-dimensionalen Lebesgue-Maßes)
$X = \mathbb{R}^n$
Wir bezeichnen $Q_{a,b} = \prod_{j=1}^{n} (a_j, b_j] = \{x \in \mathbb{R}^n,\ a_j < x_j \le b_j \quad (\forall j \in \{1, ..., n\})\}$, wobei wieder $a_j < b_j$ vorausgesetzt wird und die Fälle $a_j = -\infty$, $b_j = \infty$ zugelassen werden.

Σ_0 wird gebildet aus $\emptyset$ und aus allen endlichen Vereinigungen von links offenen halboffenen Quadern obiger Gestalt.

$\mu_0(M)$ ist nach Definition der Jordansche Inhalt von M, falls $M \in \Sigma_0$ eine beschränkte Menge ist. Ist $M \in \Sigma_0$ unbeschränkt, so ist $\mu_0(M) = \infty$.
Die endliche Additivität von μ_0 folgt aus Eigenschaften des Riemann-Integrals und der Beweis der σ-Additivität kann wie in Beispiel 4 geführt werden.

Modifikation:
Seien monoton wachsende rechtsseitig stetige Funktionen $F_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (j \in \{1, ..., n\})$ gegeben.
Sei ferner $F_j(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_j(x)$ und $F_j(\infty) = \lim_{x \to \infty} F_j(x)$.
Dann kann ein σ-additives Maß μ_0 auf Σ_0 mit $\mu_0(Q_{a,b}) = \prod_{j=1}^{n} (F_j(b_j) - F_j(a_j))$ definiert werden.

Beispiel 6
$X \subset R^n$ quadrierbar mit positivem Jordanschen Inhalt
Σ_0 bestehe aus den quadrierbaren Teilmengen von X.
$\mu_0(M)$ sei der Jordanscher Inhalt von M.

Modifikation: (Ermöglicht ebenfalls die Konstruktion des n-dimensionalen Lebesgue-Maßes)
$X = \mathbb{R}^n$
Σ_0 bestehe aus den quadrierbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und deren Komplementärmengen. Dies ist eine Mengenalgebra.
$\mu_0(M)$ sei der Jordanscher Inhalt von M, falls M quadrierbar ist. Ist M Komplementärmenge einer quadrierbaren Menge, so setzt man $\mu_0(M) = \infty$.

Idee für σ-Additivität: Approximation von Außen und Innen mit Mengen der Algebra Σ_0 aus Beispiel 5.

0.1.b) Konstruktion des Lebesgue-Integrals

Sei (X, Σ_0, μ_0) ein Tripel bestehend aus einer nichtleeren Menge X, einer Mengenalgebra Σ_0 auf X und einem σ-additiven Maß μ_0. Für die Erweiterung der Mengenalgebra und die Fortsetzung des Maßes werden wir später noch voraussetzen, dass μ_0 σ-endlich ist. Für die jetzt folgende Konstruktion des Lebesgue-Integrals wird diese Voraussetzung nicht benötigt.

Oder sei (X, Σ_0, μ_0) das Tripel aus 9.1.a), Beispiel 5. Dieser Fall wir im Folgenden als Referenzfall zitiert. Er führt zur Konstruktion des üblichen Lebesgue-Integrals auf $\mathbb{R}^n$.

Wir konstruieren einen Raum $\mathscr{L}'$ reellwertiger integrierbarer Treppenfunktionen und vergrößern diesen mehrfach $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}'' \subset ...$ wobei jeweils das Integral fortgesetzt wird.

Konstruktion von $\mathscr{L}'$ Wir setzen

$$\Sigma_{0,\text{fin}} = \{M \in \Sigma_0; \mu_0(M) < \infty\}.$$

$\mathscr{L}'$ besteht aus allen reellen Linearkombinationen von Funktionen χ_M für $M \in \Sigma_{0,\text{fin}}$), d.h. aus Funktionen der Gestalt

$$f = \sum_{k=1}^{l} c_k \chi_{M_k} \qquad (l \in \mathbb{N}, M_k \in \Sigma_{0,\text{fin}}, c_k \in \mathbb{R}).$$

Hat f diese Darstellung, so definieren wir das Integral von f als $I(f) = \sum\limits_{k=1}^{l} c_k \mu_0(M_k)$.

Die Elemente von $\mathscr{L}'$ nennen wir *reelle elementare Treppenfunktionen* bezüglich (X, Σ_0, μ_0).

Eigenschaften von $\mathscr{L}'$: Linearer Raum, stabil bezüglich Bildung von Produkten, Maximum und Minimum von 2 Funktionen

Eigenschaften von I: Linear, monoton

Diese Eigenschaften beruhen darauf, dass man das Mengensystem $\{M_k\}$ in der Darstellung $f = \sum_{k=1}^{l} c_k \chi_{M_k}$ verfeinern kann, ohne $I(f)$ zu ändern. Ebenso kann man Summanden mit gleichen Mengen zusammenfassen. Somit kann man für zwei Funktionen ohne Änderung des Integrals zu Darstellungen übergehen, bei denen alle beteiligten Mengen aus einem endlichen System paarweise disjunkter Mengen aus $\Sigma_{0,\text{fin}}$ stammen, wobei in jeder Summe jede Menge höchstens einmal vorkommt.

Definition $N \subset X$ heißt Nullmenge, bezüglich (X, Σ_0, μ_0), falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ mit $M_j \in \Sigma_0, N \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j$ und $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j) < \varepsilon$ gefunden werden kann.

Satz 1 Sind N_k $(k \in N)$ Nullmengen, so ist auch $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N_k$ Nullmenge.

Beweis Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig. Finde $\varepsilon_k > 0$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon$.
Finde Überdeckung $N_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} M_{k,j}$ mit $M_{k,j} \in \Sigma_0$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_{k,j}) < \varepsilon_k$.

Somit folgt $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset \bigcup_{k,j=1}^{\infty} M_{k,j}$, $\qquad \sum_{k,j=1}^{\infty} \mu_0(M_{k,j}) < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon$.

Beispiele von Nullmengen

- $\mathbb{R}^n$:(Referenzfall) Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^n$ deren sämtliche Koordinaten rationale Zahlen sind.
- $\mathbb{R}^n$:(Referenzfall) Vereinigungsmenge aller Kanten spezieller Würfel
- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$: (Referenzfall) Cantormenge oder Cantorsches Diskontinuum
  $[0,1] \setminus \bigcup\limits_{k,j=0}^{\infty} \left(\frac{3j+1}{3^k}, \frac{3j+2}{3^k}\right) = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \ , \ a_k \in \{0,2\} \right\}$
  Der Nachweis dafür, dass die Cantormenge eine Nullmenge ist, wird später nach Entwicklung der Theorie wesentlich einfacher.

Sprechweise: Eine Eigenschaft (formuliert für Elemente $x \in X$) gilt *fast überall (f.ü.)*, falls eine Nullmenge $N \subset X$ so existiert, daß die Eigenschaft für alle $x \in X \setminus N$ gilt.

Hilfssatz 1: Gelten für die Glieder einer Folge M_j von Mengen aus $\Sigma_{0,\text{fin}}$ die Relationen $M_j \supset M_{j+1}$ und ist $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} M_j$ eine Nullmenge, so folgt $\lim\limits_{j\to\infty} \mu_0(M_j) = 0$.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition der Nullmenge existieren $U_j \in \Sigma_0$ mit $N = \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(U_j) < \varepsilon$. Für $\widetilde{M}_j = M_j \setminus \bigcup_{l=1}^{j} U_l$ gelten dann $\widetilde{M}_j \in \Sigma_{0,\text{fin}}$ und $\bigcap_{j=1}^{\infty} \widetilde{M}_j = \emptyset$. Da wegen der σ-Additivität aus $\widetilde{M}_l = \bigcup_{j=l}^{\infty} (\widetilde{M}_j \setminus \widetilde{M}_{j+1})$ folgt $\mu_0(\widetilde{M}_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(\widetilde{M}_j \setminus \widetilde{M}_{j+1}) < \infty$, existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $\mu_0(\widetilde{M}_k) = \sum_{j=k}^{\infty} \mu_0(\widetilde{M}_j \setminus \widetilde{M}_{j+1}) < \varepsilon$. Somit ist $\mu_0(M_k) \le \mu_0(\widetilde{M}_k \cup \bigcup_{l=1}^{k} U_l) \le \mu_0(\widetilde{M}_k) + \sum_{l=1}^{k} \mu_0(U_l) < 2\varepsilon$. Da die Folge $(\mu_0(M_j))$ monoton fällt, folgt die Behauptung.

Hier haben wir folgende allgemeine Eigenschaft von Maßen verwendet:

Subadditivität (ÜA) Gilt $M \subset \bigcup_{j=1}^{m} M_j$ und sind $M, M_j \in \Sigma_0$, so folgt $\mu_0(M) \le \sum_{j=1}^{m} \mu_0(M_j)$. Verallgemeinerung: Gilt $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ und sind $M, M_j \in \Sigma_0$, so folgt $\mu_0(M) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j)$.

Hilfssatz 2: Ist (f_j) eine Folge in $\mathscr{L}'$, so dass $f_j \searrow 0$ f.ü. (d.h. $f_j(x)$ konvergiert f.ü. monoton fallend gegen Null), so folgt

$$\lim_{j\to\infty} I(f_j) = 0.$$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$, $f_1 = \sum_{l=1}^{m_1} c_{1,l} \chi_{M_{1,l}}$; $0 \le f_1 \le C, V_0 = \bigcup\limits_{l=1}^{m_1} M_{1,l}$; Setze $M_j = \{x \in X;\ f_j(x) > \varepsilon\}$. Nach Vorraussetzung ist $\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$ Nullmenge, nach Hilfssatz 1 existiert also j_0, so dass für $j > j_0$ gilt: $\mu_0(M_j) < \varepsilon \rightsquigarrow$ (für $j > j_0$) $f_j \le C\chi_{M_j} + \varepsilon\chi_{V_0}$; $I(f_j) < C\varepsilon + \varepsilon\mu_0(V_0) = \varepsilon(C + \mu_0(V_0)) \rightsquigarrow$ Behauptung

Hilfssatz 3: Seien f_j, g_j Folgen in $\mathscr{L}'$, f, g reellwertige Funktionen auf X mit $f \le g$ f.ü., so dass $f_j \nearrow f$ f.ü. und $g_j \nearrow g$ f.ü. Dann folgt

$$\lim_{j\to\infty} I(f_j) \le \lim_{j\to\infty} I(g_j)\,.$$

Beweis $f_k - g_m \le (f_k - g_m)_+ \searrow 0$ f.ü. (für $m \to \infty$), $\rightsquigarrow I(f_k) - I(g_m) \le I((f_k - g_m)_+) \searrow 0 \rightsquigarrow I(f_k) \le \lim_{m\to\infty} I(g_m) \rightsquigarrow$ Behauptung

Konstruktion von $\mathscr{L}''$: Wir definieren

$$\mathscr{L}'' = \{f : X \to \mathbb{R};\ \exists\, (f_j)_{j=1}^{\infty} \ \text{ in } \ \mathscr{L}' \ \text{ so, dass } \ f_j \nearrow f \ \text{ f.ü. und } \{I(f_j)\}_{j=1}^{\infty} \text{ beschränkt}\}$$

Für $f \in \mathscr{L}''$ setzt man $I(f) = \lim\limits_{j\to\infty} I(f_j)$ falls $f_j \in \mathscr{L}'$, $f_j \nearrow f$ f.ü.

Eigenschaften I ist wohldefiniert; monoton (d.h. aus $f, g \in \mathscr{L}''$, $f \le g$ f.ü. folgt $I(f) \le I(g)$; mit $f, g \in \mathscr{L}''$ und $c \ge 0$ gelten $f + g, cf \in \mathscr{L}''$ sowie $I(f + g) = I(f) + I(g)$ und $I(cf) = cI(f)$; mit f, g ist auch $\min\{f, g\} \in \mathscr{L}''$ und $I(\min\{f, g\}) \le \min\{I(f), I(g)\}$; $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}''$ und für $f \in \mathscr{L}'$ stimmt früheres $I(f)$ mit neuem $I(f)$ überein.

Hilfssatz 4: Seien $f_j \in \mathscr{L}''$ mit $f_j \le f_{j+1}$ f.ü. gegeben und sei $\{I(f_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Dann existiert $f \in \mathscr{L}''$ mit $f_j \nearrow f$ f.ü. und $\lim\limits_{j\to\infty} I(f_j) = I(f)$.

Bemerkung: Wenn also $f_j \nearrow f$ f.ü. schon bekannt ist, gilt auch $f \in \mathscr{L}''$ und $\lim\limits_{j\to\infty} I(f_j) = I(f)$.

Beweis Sei $C > 0$ mit $|I(f_j)| \le C$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Weiter können wir annehmen, dass $(f_j(x))$ für alle $x \in X$ monoton wachsend ist (ersetze sonst f_j durch $\max\{f_1, f_2, \dots f_j\}$). Finden Folgen $(g_{j,l})_{l=1}^{\infty} \in \mathscr{L}'$ mit $g_{j,l} \nearrow f_j$ f.ü. (für $l \to \infty$ und für jedes j). Setzen

$$g_l(x) = \max\{g_{j,m}(x)\}_{j,m\le l} \in \mathscr{L}' \,.$$

Dann ist $g_l(x)$ monoton wachsend. Wir setzen weiter

$$h(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)\,, \quad g(x) = \lim_{l\to\infty} g_l(x)\,, \quad f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{falls } h(x) < \infty \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

In der folgenden Übersicht gelten dann die Ungleichungen f.ü. und die Pfeile stehen für f.ü. gültige eigentliche oder uneigentliche Grenzübergänge:

$$\begin{array}{ccccccl} g_{j,l} & \le & g_l & \le & f_l & & \text{f.ü. für } j \le l \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & l \to \infty \\ f_j & \le & g & \le & h & & \\ \downarrow & & & & & & j \to \infty \\ h\,. & & & & & & \end{array}$$

Also gilt $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \lim_{l\to\infty} g_l(x)$ f.ü. (könnte aber unendlich sein). Wenn wir nachweisen, dass $g(x) < \infty$ f.ü., so folgt $f = g$ f.ü. und

$$\begin{array}{ccccc} I(g_{j,l}) & \le & I(g_l) & \le & I(f_l) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ I(f_j) & \le & I(f) & \le & \lim_{l\to\infty} I(f_l)\,. \end{array}$$

also $I(f) = \lim_{l\to\infty} I(f_l)$.
Es bleibt also noch zu beweisen, dass $g(x) < \infty$ für fast alle $x \in X$.
Sei $N = \{x \in X;\, g(x) = \infty\}$. Es ist zu zeigen, dass N eine Nullmenge ist. Wir können $g_l \ge 0$ voraussetzen (ersetze sonst g_l durch $g_l - g_1$ und C durch $2C$). Sei $\varepsilon > 0$. Setzen $M_{l,k} = \{x \in X; g_l(x) > k\}$. Wegen $k \cdot \chi_{M_{l,k}} \le g_l \le f_l$ f.ü. ist $\mu_0(M_{l,k}) \le I(\frac{1}{k}\, f) \le \frac{C}{k}$. Wähle k so, dass $\frac{C}{k} < \varepsilon$. Dann folgt wegen $M_{l,k} \subset M_{l+1,k} \subset \dots$ und $M_{l,k} = M_{1,k} \cup \{M_{2,k} \setminus M_{1,k}\} \cup \dots \cup \{M_{l,k} \setminus M_{l-1,k}\}$, dass

$$\mu_0(M_{1,k}) + \sum_{l=2}^{\infty} \mu_0(M_{l,k} \setminus M_{l-1,k}) = \lim_{l\to\infty} \mu_0(M_{l,k}) \le \frac{C}{k} < \varepsilon\,.$$

Da außerdem $N \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} M_{l,k} = M_{1,k} \cup \bigcup_{l=2}^{\infty} M_{l,k} \setminus M_{l-1,k}$, ist N eine Nullmenge.

Hifssatz 5: Aus $g_1,\ h_1,\ g_2,\ h_2 \in \mathscr{L}''$ und $g_1 - h_1 \le g_2 - h_2$ f.ü. folgt:

$$I(g_1) - I(h_1) \le I(g_2) - I(h_2)$$

Beweis Wende Monotonie und Additivität von I auf $g_1 + h_2 \le g_2 + h_1$ f.ü. an.

Konstruktion von $\mathscr{L}'''$: $\mathscr{L}'''$ bestehe aus denjenigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ für die es $g,\ h \in \mathscr{L}''$ gibt, so dass $f = g - h$ f.ü. Man setzt dann $I(f) = I(g) - I(h)$. Die Elemente von $\mathscr{L}'''$ sind die *reellwertigen integrierbaren Funktionen.*

Konstruktion von $\mathscr{L}$: $\mathscr{L}$ sei der Raum der Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$, für die $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ in $\mathscr{L}'''$ liegen. Für $f \in \mathscr{L}$ setzt man

$$I(f) = I(\mathrm{Re}(f)) + iI(\mathrm{Im}(f))$$

Bezeichnung: $\mathscr{L}$ ist der Raum der integrierbaren Funktionen und $I(f)$ ist das Integral.

Bemerkung: Ebenso können vektorwertige Funktionen koordinatenweise integriert werden.

Satz 2 (Elementare Eigenschaften des Lebesgue-Integrals):

1. $\mathscr{L}'' \subset \mathscr{L}''' \subset \mathscr{L}$ und I ist eine wohldefinierte Fortsetung des vorherigen auf $\mathscr{L}''$ definierten Integrals I.
2. Linearität: Mit $f, g \in \mathscr{L}$ und $c \in \mathbb{C}$ gelten $f + g, cf \in \mathscr{L}$ sowie $I(f + g) = I(f) + I(g)$ und $I(cf) = cI(f)$
3. Monotonie: Aus $f, g \in \mathscr{L}'''$ und $f \leq g$ f.ü. folgt $I(f) \leq I(g)$.
4. Mit $f_1, f_2, f \in \mathscr{L}'''$ sind auch $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = \max\{-f, 0\}$ und folglich $|f|, \max\{f_1, f_2\}$, $\min\{f_1, f_2\} \in \mathscr{L}'''$.

Beweis 1., 3. folgen für $\mathscr{L}'''$ aus Hilfssatz 5.
2. Additivität folgt aus Additivität für $\mathscr{L}''$; ebenso $I(cf) = cI(f)$ falls $c \geq 0$; ist $c = -1$, so folgt mit $Re(f) = g_1 - h_1$ und $Im(f) = g_2 - h_2$ $(g_j, h_j \in \mathscr{L}'')$, dass

$$\begin{aligned} I(-f) &= I(h_1 - g_1) + iI(h_2 - g_2) \\ &= I(h_1) - I(g_1) + i(I(h_2) - I(g_2)) \\ &= -I(f). \end{aligned}$$

Ähnlich folgt $I(if) = iI(f)$.
4. Sei $f = g - h,\ g, h \in \mathscr{L}'' \rightsquigarrow f_+ = g - \min\{g, h\} \in \mathscr{L}'''$ (da $\min\{g, h\} \in \mathscr{L}''$). Ebenso ist $f_- = h - \min\{g, h\} \in \mathscr{L}'''$. Folglich liegen $|f| = f_+ + f_-$, $\max\{f_1,\ f_2\} = f_1 + (f_2 - f_1)_+$ und $\min\{f_1,\ f_2\} = f_1 - (f_1 - f_2)_+$ in $\mathscr{L}'''$.

Hilfssatz 6: Für jedes $f \in \mathscr{L}'''$ und jedes $\varepsilon > 0$ existieren $g,\ h \in \mathscr{L}''$ mit $f = g - h,\ h \geq 0$ und $I(h) < \varepsilon$.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Nehmen irgend eine Darstellung $f = \widetilde{g} - \widetilde{h}$ mit $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in \mathscr{L}''$; finden Folgen $(\widetilde{g_j}), (\widetilde{h_j})$ in $\mathscr{L}'$ mit $\widetilde{g_j} \nearrow \widetilde{g}, \widetilde{h_j} \nearrow \widetilde{h}$ f.ü. ; bestimmen j_0 mit $I(\widetilde{h}) - I(\widetilde{h}_{j_0}) < \varepsilon$ und setzen $g = \widetilde{g} - \widetilde{h}_{j_0}, h = \widetilde{h} - \widetilde{h}_{j_0}$. Dann gelten $f = g - h$, $h \geq 0$ und $I(h) < \varepsilon$. Wegen $(\widetilde{g_j} - \widetilde{h}_{j_0}) \nearrow g$ f.ü. und $(\widetilde{h_j} - \widetilde{h}_{j_0}) \nearrow h$ f.ü. sind $g, h \in \mathscr{L}''$.

Satz 3 (Konvergenzsatz von Beppo Levi) Sind $f_j \in \mathscr{L}$ reellwertig mit $f_j \leq f_{j+1}$ f.ü. (für alle $j \in \mathbb{N}$) und ist $\{I(f_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so existiert $f \in \mathscr{L}$ mit $\lim_{j \to \infty} f_j(x) = f(x)$ f.ü. und $\lim_{j \to \infty} I(f_j) = I(f)$.

Bemerkung: Setzt man also $f_j \nearrow f$ f.ü. , $f_j \in \mathscr{L}$ und $\{I(f_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt voraus, so folgt $f \in \mathscr{L}, I(f) = \lim_{j \to \infty} I(f_j)$.

Beweis Kann $f_j \geq 0$ voraussetzen (ersetze sonst f_j durch $f_j - f_1$). Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\varepsilon_j > 0$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \varepsilon$.
Setze $h_1 = f_1$ und $h_j = f_j - f_{j-1}$ für $j \geq 2$ und finde Darstellungen $h_j = \widetilde{f}_j - \widetilde{g}_j$ f.ü. mit $\widetilde{f}_j, \widetilde{g}_j \in \mathscr{L}'', \widetilde{g}_j \geq 0, I(\widetilde{g}_j) < \varepsilon_j$ (Hilfssatz 6).
Beachtet man , dass $I(\sum_{j=1}^{m} \widetilde{g}_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j$ und $I(\sum_{j=1}^{m} \widetilde{f}_j) = I(\sum_{j=1}^{m} (h_j + \widetilde{g}_j)) \leq I(f_m) + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \leq \sup\{I(f_j)\} + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j$, wobei diese Partialsummenfolgen monoton wachsen, so folgt mit Hilfssatz 4, dass $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \mathscr{L}''$ so existieren, dass $\sum_{j=1}^{m} \widetilde{f}_j \nearrow \widetilde{f}$ f.ü., $\sum_{j=1}^{m} \widetilde{g}_j \nearrow \widetilde{g}$ f.ü. (für $m \to \infty$).
Da $\lim_{j\to\infty} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} h_j = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \widetilde{f}_j - \sum_{j=1}^{m} \widetilde{g}_j \right) = \widetilde{f} - \widetilde{g}$ f.ü. gilt, ist $f = \widetilde{f} - \widetilde{g} \in \mathscr{L}$ und $I(f) = I(\widetilde{f}) - I(\widetilde{g}) = \sum_{j=1}^{\infty} I(\widetilde{f}_j) - \sum_{j=1}^{\infty} I(\widetilde{g}_j) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} I(\widetilde{f}_j - \widetilde{g}_j) = \lim_{m\to\infty} I(f_m)$.

Satz 4 (Lemma von f) Gelten für Funktionen $f, f_j : X \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen $f_j \in \mathscr{L}$, $f_j \geq 0, \lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ f.ü. und ist $\{I(f_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so folgen $f \in \mathscr{L}$ und $I(f) \leq \underline{\lim} I(f_j)$.

Beweis Sei $\underline{\lim} I(f_j) = C$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Durch Übergang zu Teilfolge kann $I(f_j) \leq C+\varepsilon$ vorausgesetzt werden. Betrachte $g_{k,l} = \min\{f_{k+1}, \ldots, f_{k+l}\}$. Dann ist $0 \leq \lim_{l\to\infty} I(g_{k,l})$ $\leq I(f_{k+1}) \leq C+\varepsilon$. Somit erfüllt die Folge $(-g_{k,l})_{l=1}^{\infty}$ die Voraussetzungen von Satz 3. Es existieren also reellwertige Funktionen $g_k \in \mathscr{L}$ mit $g_{k,l} \searrow g_k$ f.ü. Wegen $I(g_k) = \lim_{l\to\infty} I(g_{k,l}) \leq C + \varepsilon$ erfüllt nun die monoton wachsende Folge (g_k) ebenfalls die Voraussetzungen von Satz 3. Da $g_k \nearrow f$ f.ü. ist $f \in \mathscr{L}$. Da außerdem $I(f) \leq C + \varepsilon$ ist, folgt für $\varepsilon \to 0$ auch noch die behauptete Ungleichung.

Beispiel für $I(f) < \underline{\lim} I(f_j)$ (Referenzfall, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$): $f_j = \chi_{(j,j+1]}$ $I(f_j) = 1$; $f_j \to 0$ f.ü.

Eine Funktion g heißt Majorante der Funktionenfolge (f_j), falls $|f_j(x)| \leq g(x)$ f.ü. gilt.

Satz 5 (Konvergenzsatz von Lebesgue) Hat eine Folge (f_j) in $\mathscr{L}$ eine Majorante $g \in \mathscr{L}$ und gilt für eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, dass $\lim_{l\to\infty} f_j(x) = f(x)$ f.ü., so folgen $f \in \mathscr{L}$ und $I(f) = \lim_{j\to\infty} I(f_j)$

Beweis Für reellwertige Funktionen: $g \pm f_j$ erfüllen Voraussetzung von Satz 4. Bezeichnen $c = \underline{\lim} I(f_j)$ und $C = -\underline{\lim} I(-f_j) = \overline{\lim} I(f_j)$. $\Rightarrow I(g) + I(f) = I(g + f) \leq I(g) + c$
$I(g) - I(f) = I(g - f) \leq I(g) - C \Rightarrow C - I(f) \leq 0 \leq c - I(f)$ Da aber $c \leq C$, folgt $c = C = I(f) = \lim_{j\to\infty} I(f_j)$.
Für komplexwertige Funktionen folgen nun $I(\mathrm{Re}(f_j)) \to I(\mathrm{Re} f)$; $I(\mathrm{Im} f_j) \to I(\mathrm{Im} f)$ weil jedes mal g Majorante ist.

Satz 6 (Dichtheit der elementaren Treppenfunktionen) Für $f \in \mathscr{L}$ und $\varepsilon > 0$ existieren $g, h \in \mathscr{L}'$ mit $I(|f - g - \mathrm{i}h|) < \varepsilon$.

Beweis Wir approximieren zunächst $\mathrm{Re} f$ nach Hilfssatz 6 durch $\mathrm{Re} f = \widetilde{g} - \widetilde{h}$ $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in \mathscr{L}'', \widetilde{h} \geq 0, I(\widetilde{h}) < \frac{\varepsilon}{4}$. Nach Definition von $\mathscr{L}''$ existieren $g_j \in \mathscr{L}', g_j \nearrow \widetilde{g}, I(g_j) \nearrow I(\widetilde{g})$. Wir wählen $g = g_j$ so, dass $I(\widetilde{g} - g) < \frac{\varepsilon}{4}$ also $I(|\mathrm{Re} f - g|) \leq I(|\widetilde{g} - g| + \widetilde{h}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Genauso lässt sich $\mathrm{Im} f$ durch $h \in \mathscr{L}'$ approximieren, woraus leicht die Behauptung folgt.

Satz 7 (von der fast überall konvergenten Teilfolge, Vollständigkeit) Seien $f_j \in \mathscr{L}$ $(j \in \mathbb{N})$ so gegeben, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein j_0 so existiert, dass für alle $j > j_0$ gilt $I(|f_j - f_{j_0}|) < \varepsilon$. Dann existiert eine f.ü. konvergente Teilfolge $(f_{j_k})_{k=1}^{\infty}$, die eine Majorante in $\mathscr{L}$ besitzt. Der Limes der Teilfolge ist bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmt. Er ist f.ü. gleich einer Funktion $f \in \mathscr{L}$.

Beweis Bestimmen j_k ($j_{k+1} > j_k$) so, dass für $j > j_k$ stets gilt $I(|f_j - f_{j_k}|) < 2^{-k}$. Nach Satz 3 (angewandt auf die Partialsummenfolge) konvergiert $|f_{j_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{j_{k+1}} - f_{j_k}|$ f.ü. gegen eine Funktion $g \in \mathscr{L}$. Folglich konvergiert $f_{j_m} = f_{j_1} + \sum_{k=2}^{m} \left(f_{j_k} - f_{j_{k-1}}\right)$ f.ü. gegen eine Funktion f, wobei g Majorante ist. Nach Satz 5 ist $f \in \mathscr{L}$.
Wäre h auch Limes einer Teilfolge, so könnten wir eine dritte Teilfolge mit $I(|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}|) < 2^{-k}$ konstruieren, die abwechselnd aus Elementen der ersten bzw. der zweiten Folge besteht. Diese würde dann f.ü. gegen f und f.ü. gegen h konvergieren, also $f = h$ f.ü.

Satz 8 (Dreiecksungleichung) Mit $f \in \mathscr{L}$ folgen $|f| \in \mathscr{L}$ und $|I(f)| \leq I(|f|)$.

Beweis Dies folgt für elementare TF (d.h. für Funktionen f mit $\mathrm{Re} f \in \mathscr{L}'$ und $\mathrm{Im} f \in \mathscr{L}'$) aus der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen (oder im Referenzfall aus Eigenschaften des Riemann-Integrals). Konstruieren nun nach Sätzen 6, 7 eine Folge f_j elementarer TF für die $f_j \to f$ f.ü. mit Majorante g. Dann sind $|f_j| \in \mathscr{L}'$und die Behauptung folgt aus

$$|I(f_j)| \leq I(|f_j|)$$

durch Grenzübergang und Anwendung des Konvergenzsatzes von Lebesgue.

Hilfsatz 7 Eine Teilmenge $N \subset X$ ist dann und nur dann Nullmenge, wenn $\chi_N \in \mathscr{L}$ und $I(\chi_N) = 0$ gelten.

Beweis Ist die Funktion χ_N f.ü. gleich Null, so gehört sie nach Definition zu $\mathscr{L}''$ und hat das Integral Null.
Ist andererseits $\chi_N \in \mathscr{L}$ und gilt $I(\chi_N) = 0$, so folgt $\chi_N \in \mathscr{L}'''$. Nach Hilfssatz 6 existieren für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ Funktionen $g, h \in \mathscr{L}''$ mit $\chi_N = g - h$ f.ü., $h \geq 0$, $I(h) < \frac{\varepsilon}{4}$. Dann ist $I(g) = I(\chi_N) + I(h) < \frac{\varepsilon}{4}$. Wir betrachten Folge $(g_j)_{j=1}^{\infty}$ in $\mathscr{L}'$ mit $g_j \nearrow g$ f.ü. Dabei kann $g_j \geq 0$ vorausgesetzt werden (ersetze sonst g_j durch $(g_j)_+$) Weiterhin kann $g_j \leq g_{j+1}$ vorausgesetzt werden (ersetze sonst g_j durch $\max\{g_1, g_2 \ldots, g_j\}$). Setzt man $V_1 = \left\{x \in X; g_1(x) \geq \frac{3}{4}\right\}$ und $V_j = \left\{x \in X; g_{j-1}(x) < \frac{3}{4}, g_j(x) \geq \frac{3}{4}\right\}$ für ($j \geq 2$), so sind die V_j paarweise disjunkt, $\chi_{V_j} \leq \frac{4}{3} g$ und $M = N \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ ist eine Nullmenge (weil $\chi_N \leq g$ f.ü.). Deshalb findet man eine Folge (W_j) in Σ_0, so dass $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$, und $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(W_j) < \frac{1}{3}\varepsilon$. Dann gelten

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$$

und $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(V_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(W_j) < \frac{4}{3} I(g) + \frac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon$, woraus folgt, dass N eine Nullmenge ist. Dies beweist die Behauptung.

Oft sind folgende Stetigkeitseigenschaften σ-additiver Maße nützlich:

Stetigkeiteigenschaften von Maßen (ÜA)
Sei (X, Σ_0, μ_0) ein Tripel bestehend aus einer nichtleeren Menge X, einer Mengenalgebra Σ_0 auf X und einem σ-additiven Maß μ_0.

1. Für jede aufsteigende Folge $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ in Σ_0 mit $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \in \Sigma_0$ gilt $\lim_{j\to\infty} \mu_0(M_j) = \mu_0(M)$
2. Für jede absteigende Folge $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ in Σ_0 mit $\mu_0(M_1) < \infty$ und $M = \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j \in \Sigma_0$ gilt $\lim_{j\to\infty} \mu_0(M_j) = \mu_0(M)$

Bemerkung Bisher (also zur Konstruktion des Integrals) wurde die σ-Endlichkeit von (X, Σ_0, μ_0) nicht benötigt. Für die Konstruktion einer Erweiterung von (X, Σ_0, μ_0) zu einem Maßraum ist diese Bedingung aber von Vorteil. Lag von Anfang an ein Maßraum vor (wie z. B. im Falle des Zählmaßes auf einer überabzählbaren Menge X), so käme man weiterhin ohne diese Bedingung aus.

Definitionen und Bezeichnungen

Ist μ_0 σ-endlich, so wählen wir $A_k \in \Sigma_{0,\text{fin}}$ $(k \in \mathbb{N})$ mit $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = X$ und $A_k \subset A_{k+1}$ aus. Wir setzen

$$\Sigma = \{M \subset X;\ \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gilt } \chi_{A_k \cap M} \in \mathscr{L}\}$$

Für $M \in \Sigma$ setzen wir

$$\mu(M) = \lim_{k\to\infty} I(\chi_{A_k \cup M})\,.$$

Satz 9 Sei μ_0 σ-endlich. Mit obigen Definitionen und Bezeichnungen gelten dann:

1. Ist $M \in \Sigma$, so gilt $\mu(M) < \infty$ genau dann wenn $\chi_M \in \mathscr{L}$ und dann gilt $\mu(M) = I(\chi_M)$.

2. Σ ist die von Σ_0 und den μ_0-Nullmengen erzeugte σ-Algebra. μ ist ein σ-additives Maß auf Σ und für $M \in \Sigma_0$ gilt $\mu(M) = \mu_0(M)$.

3. Die μ_0-Nullmengen (d.h. die Nullmengen bzgl. (X, Σ_0, μ_0)) sind genau die μ-Nullmengen (d.h. die Nullmengen bzgl. (X, Σ, μ)). Diese sind durch $\mu(N) = 0$ charakterisiert.

4. Führt man die Konstruktion des Integrals auf der Grundlage von (X, Σ, μ) (anstelle (X, Σ_0, μ_0)) aus, so erhält man denselben Raum $\mathscr{L}$ und dasselbe Integral.

5. μ ist das einzige σ-additive Maß auf Σ, welches auf Σ_0 mit μ_0 übereinstimmt.

Beweis

1. Aus $\mu(M) < \infty$ folgt $\chi_{A_k \cap M} \nearrow \chi_M$, $\chi_M \in \mathscr{L}$ und $\lim_{k\to\infty} I(\chi_{A_k \cap M}) = I(\chi_M)$ (nach B. Levi). Gilt $\chi_M \in \mathscr{L}$, so ist auch $\chi_{A_k \cap M} = \min\{\chi_{A_k}, \chi_M\} \in \mathscr{L}$ und $\mu(M) = \lim_{k\to\infty} I(\chi_{A_k \cap M}) = I(\chi_M)$ wegen Lebesgue.

2. Natürlich gilt $\Sigma_0 \subset \Sigma$. Ist $M \in \Sigma_0$, so ist $M \cap A_k \in \Sigma_{0,\text{fin}}$ und $\mu(M) = \mu_0(M)$ folgt aus der σ-Additivität von μ_0, (verwende $M = (M \cap A_1) \cup \cup_{j=2}^{\infty} M \cap (A_j \setminus A_{j-1})$). Natürlich enthält Σ die μ_0-Nullmengen und $\mu(N) = I(\chi_N) = 0$ für jede solche Nullmenge N. Wir zeigen, dass Σ eine Mengenalgebra ist und dass μ endlich additiv ist:
   Seien $M_1, M_2 \in \Sigma$.
   $$A_k \cap (X \setminus M_1) = A_k \setminus (A_k \cap M_1), \chi_{A_k \cap (X \setminus M_1)} = \chi_{A_k} - \chi_{A_k \cap M_1} \in \mathscr{L} \rightsquigarrow X \setminus M_1 \in \Sigma$$
   $$\chi_{A_k \cap (M_1 \cup M_2)} = \max\{\chi_{A_k \cap M_1}, \chi_{A_k \cap M_2}\} \in \mathscr{L} \rightsquigarrow M_1 \cup M_2 \in \Sigma$$
   Gilt auch $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, so ist
   $$\chi_{A_k \cap (M_1 \cup M_2)} = \chi_{A_k \cap M_1} + \chi_{A_k \cap M_2}$$
   also $I(\chi_{A_k \cap (M_1 \cup M_2)}) = I(\chi_{A_k \cap M_1}) + I(\chi_{A_k \cap M_2})$. Für $k \to \infty$ folgt $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$.
   Wir zeigen, dass Σ eine σ-Algebra ist und dass μ σ-additiv ist.
   Sind $M_j \in \Sigma$ $\quad (j \in \mathbb{N})$ und ist $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$, so folgt mit $V_l = \bigcup_{j=1}^{l} M_j$
   $$\chi_{A_k \cap V_l} \nearrow \chi_{A_k \cap M} \text{ (für } l \to \infty\text{), und } I(\chi_{A_k \cap V_l}) \le I(\chi_{A_k})$$
   Nach B. Levi ist $\chi_{A_k \cap M} \in \mathscr{L}$, also $M \in \Sigma$. Sind die M_j noch paarweise disjunkt, so folgt weiter
   $$I(\chi_{A_k \cap V_l}) = \sum_{j=1}^{l} \mu(A_k \cap M_j)$$
   Für $l \to \infty$ folgt $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_k \cap M_j) = I(\chi_{A_k \cap M}) = \mu(A_k \cap M)$. Für $k \to \infty$ folgt nun $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j) = \mu(M)$.
   Es ist also nachgewiesen, dass (X, Σ, μ) ein Maßraum ist.
   Wir zeigen, dass Σ als σ-Algebra von Σ_0 und den Nullmengen erzeugt wird.

Sei $M \in \Sigma$. Wegen $M = \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap M)$ reicht es aus zu zeigen, dass $A_k \cap M$ in der von Σ_0 und den Nullmengen erzeugten σ-Algebra liegt. Da $\chi_{A_k \cap M} \in \mathscr{L}$ ist, existiert nach den Sätzen 6 und 7 eine Folge $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ in $\mathscr{L}'$, so dass

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \chi_{A_k\cap M}(x)$$

fast überall gilt.
Setzt man dann $M_{j,l} = \left\{x \in X; 1 - \frac{1}{l} < f_j(x) < 1 + \frac{1}{l}\right\}$, so unterscheiden sich M und die in der von Σ_0 erzeugten σ-Algebra liegende Menge

$$\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{j=m}^{\infty} M_{j,l}$$

höchstens um eine Nullmenge. (Man überzeuge sich davon, dass die letzte Menge gleich der Menge

$$\left\{x \in X; \lim_{j\to\infty} f_j(x) = 1\right\}$$

ist).
Damit ist dieser Punkt bewiesen.

3. Nach Hilfssatz 7 und dem schon bewiesenen Punkt 1 von Satz 9 sind die μ_0-Nullmengen genau die Mengen $N \in \Sigma$, für die $\mu(N) = 0$ ist. Solche Mengen sind auch μ-Nullmengen.
Sei nun N μ-Nullmenge. Nach Definition existieren Mengen $U_{k,l} \in \Sigma$ mit $N \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} U_{k,l}$ und $\sum_{l=1}^{\infty} \mu(U_{k,l}) < \frac{1}{k}$. Dabei kann bei festem k angenommen werden, dass die $U_{k,l}$ paarweise disjunkt sind, dass also mit $U_k = \bigcup_{l=1}^{\infty} U_{k,l}$ gilt $\mu(U_k) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu(U_{k,l}) < \frac{1}{k}$.
Es gelten dann weiter $N \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \overset{def}{=} U$, $\mu(U) \le \mu(U_k) \le \frac{1}{k}$, also $\mu(U) = 0$. Damit ist U und folglich auch N eine μ_0-Nullmengen.

4. Wegen 1-3 ist $\chi_M \in \mathscr{L}$ genau dann wenn $M \in \Sigma$ und $\mu(M) < \infty$. In diesem Falle ist $\mu(M) = I(\chi_M)$. Konstruiert man nun $\mathscr{L}', \mathscr{L}'', \mathscr{L}''', \mathscr{L}$ für μ, so sind sie alle in für μ_0 konstruiertem Raum $\mathscr{L}$ enthalten und das Integral I stimmt jeweils überein. Für $\mathscr{L}', \mathscr{L}''', \mathscr{L}$ folgt dies durch Linearität, für $\mathscr{L}''$ folgt es aus B. Levi.

5. Ist ν ein Maß auf Σ, welche auf Σ_0 mit μ_0 übereinstimmt, so sind die μ_0-Nullmengen auch ν-Nullmengen. Wir bezeichnen mit $\mathscr{L}_\nu$ den für (M, Σ, ν) (anstelle (M, Σ_0, μ_0)) konstruierten Raum integrierbarer Funktionen und mit I_ν das zugehörige Integral. Dann folgt $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}_\nu$ und die Integrale stimmen auf $\mathscr{L}'$ überein (weil sie durch μ_0 bestimmt sind). Wählt man für $f \in \mathscr{L}''$ eine Folge (f_j) in $\mathscr{L}'$ mit $f_j \nearrow f$ μ_0-f.ü., so folgt aus Satz 3 (angewandt für $\mathscr{L}_\nu$), dass $f \in \mathscr{L}_\nu$ und dass $I_\nu(f) = \lim_{j\to\infty} I_\nu(f_j) = I(f)$. Durch Übergang zur linearen Hülle folgt $I_\nu(f) = I(f)$ für alle $f \in \mathscr{L}$. Insbesondere folgt für $M \in \Sigma$ und $k \in \mathbb{N}$, dass $\mu(A_k \cup M) = I(\chi_{A_k \cup M}) = I_\nu(\chi_{A_k\cup M}) = \nu(A_k \cup M)$. Für $k \to \infty$ folgt $\mu(M) = \nu(M)$.

Oft ist folgende für Maßräume gültige Charakterisierung von Nullmengen nützlich.

Charakterisierung von Nullmengen (ÜA) Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Eine Teilmenge $N \subset X$ ist μ-Nullmenge genau dann, wenn eine Menge $M \in \Sigma$ mit $N \subset M$ und $\mu(M) = 0$ existiert.

Definition: Vollständiger Maßraum Ein Maßraum (X, Σ, μ) heißt vollständig, falls Σ jede μ-Nullmenge enthält.

Bemerkungen Dies ist äquivalent dazu, dass für jedes $M \in \Sigma$ mit $\mu(M) = 0$ alle Teilmengen $N \subset M$ Elemente von Σ sind. Ist das nicht der Fall, so könnte man durch Hinzunahme all dieser Teilmengen leicht zu einem vollständigen Maßraum übergehen. Das ist aber z. B. dann nicht sinnvoll, wenn man gleichzeitig mehrere Maße mit möglicherweise verschiedenen Systemen von Nullmengen betrachten will.
Der Vollständigkeitsbegriff für Maßräume betrifft einen vollkommen anderen Sachverhalt als der Vollständigkeitsbegriff für metrische oder normierte Räume.

Definitionen und Bezeichnungen: Sei (X, Σ, μ) ein vollständiger Maßraum.

1. Mit $\mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ wird der auf der Grundlage von (X, Σ, μ) anstelle von (X, Σ_0, μ_0) konstruierte Raum $\mathscr{L}$ der integrierbaren Funktionen bezeichnet.
(Wurde (X, Σ, μ) auf der Grundlage eines Tripels (X, Σ_0, μ_0), bestehend aus einer nichtleeren Menge X, einer Mengenalgebra Σ_0 auf X und einem σ-additiven und σ-endlichen Maß μ_0 konstruiert, so fällt $\mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ nach Satz 9 mit dem für (X, Σ_0, μ_0) konstruierten Raum $\mathscr{L}$ zusammen.)
Wenn klar ist, welcher Maßraum gemeint ist, verwendet man auch kürzere Bezeichnungen, wie $\mathscr{L}_1(X)$, $\mathscr{L}_1(\mu)$, $\mathscr{L}_1$.

2. Das Integral $I(f)$ der Funktion $f \in \mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ wird geschrieben als

$$\int f \,\mathrm{d}\,\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\,\mu = \int_X f(x) \,\mathrm{d}\,\mu(x).$$

3. Für $f \in \mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ und $M \in \Sigma$ schreibt man

$$\int_M f \,\mathrm{d}\,\mu = \int_X \chi_M \cdot f \,\mathrm{d}\,\mu\,.$$

Diese Bezeichnung verwendet man auch, wenn die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Element von $\mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ ist (f braucht also z.B. nicht auf ganz X definiert zu sein).
In diesem Falle heißt f μ-integrierbar auf M. Der Raum der auf M definierten μ-integrierbaren Funktionen wird auch mit $\mathscr{L}_1(M)$ bezeichnet.

4. Im Referenzfall ist das aus (X, Σ_0, μ_0) konstruierte Maß das Lebesgue-Maß auf $X = \mathbb{R}^n$. Es wird oft mit λ bezeichnet. $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \lambda)$ ist somit der auf der Grundlage von (X, Σ_0, μ_0) aus 9.1.a), Beispiel 5 konstruierte vollständige Maßraum. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Σ-messbare Menge, so bezeichnet $\mathscr{L}_1(M)$ den auf der Grundlage dieses Maßraumes konstruierten Raum λ-integrierbarer Funktionen. Da das ensprechende Integral das n-dimensionale Riemann-Integral verallgemeinert (s. ÜA), schreibt man meist

$$\int_M f(x) \,\mathrm{d}\,x \quad \text{anstelle} \quad \int_M f(x) \,\mathrm{d}\,\lambda(x)\,.$$

Definition: messbar Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt messbar bezüglich einer σ-Algebra Σ von Teilmengen von X (Σ-messbar oder kurz messbar, falls klar ist, welche σ-Algebra gemeint ist), wenn folgende zueinander äquivalente Bedingungen erfüllt sind:

1. $\forall r \in \mathbb{Q}$ gilt $f^{-1}((r, \infty)) = \{x \in X; f(x) > r\} \in \Sigma$
2. $\forall r \in \mathbb{Q}$ gilt $f^{-1}([r, \infty)) \in \Sigma$
3. $\forall r \in \mathbb{Q}$ gilt $f^{-1}((-\infty, r)) \in \Sigma$
4. $\forall r \in \mathbb{Q}$ gilt $F^{-1}((-\infty, r]) \in \Sigma$
5. Das Urbild jedes Intervalls gehört zu Σ.

Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ bzw. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ heißt messbar, wenn Re f und Im f bzw. alle Koordinatenfunktionen messbar sind.

Bemerkung In der Definition braucht es sich nicht um die gerade konstruierte σ-Algebra zu handeln.

Beweis der Äquivalenz Wir zeigen z.B., dass aus 1. folgt $f^{-1}((a,b)) \in \Sigma$ falls $a < b < \infty$. Dazu nehmen wir eine monoton fallende Folge (s_j) in $\mathbb{Q}$ mit Limes a und eine monoton wachsende Folge (r_j) in $\mathbb{Q}$ mit Limes b. Folglich ist $[b,\infty) = \bigcap_{j=1}^{\infty}(r_j,\infty), (a,\infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty}(s_j,\infty)$, also ist $f^{-1}((a,b)) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}((s_j,\infty)) \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} f^{-1}((r_j,\infty)) \in \Sigma$. Genauso zeigt man, dass Urbilder anderer Intervalle in Σ liegen. Also gilt $1 \rightsquigarrow 5$. $5 \rightsquigarrow 1$ ist trivial und die anderen Äquivalenzen kann man genauso beweisen.

Definition: Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt *Treppenfunktion* (bezüglich einer gegebenen σ-Algebra Σ von Teilmengen von X), falls paarweise disjunkte Mengen $M_j \in \Sigma$ und Zahlen $c_j \in \mathbb{C}$ $(j \in \mathbb{N})$ so existieren, dass für alle $x \in X$ gilt

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, \chi_{M_j}(x) \,.$$

Man kann in dieser Darstellung einer Treppenfunktion auch immer $\bigcup M_j = X$ voraussetzen (füge sonst Summanden $c_0 \, \chi_{M_0}$ mit $c_0 = 0$ und $M_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ hinzu.) Für zwei (oder endlich viele) Treppenfunktionen kann man dann Darstellungen mit ein und demselben Mengensystem $\{M_j\}$ finden. Ist etwa $g = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, \chi_{U_j}$ und $h = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \, \chi_{V_k}$, wobei $\bigcup_j U_j = \bigcup_k V_k = X$ vorausgesetzt werde, so folgt $g = \sum_{j,k=1}^{\infty} c_j \, \chi_{U_j \cap V_k}$ und $h = \sum_{j,k=1}^{\infty} d_k \, \chi_{U_j \cap V_k}$. Die letzten beiden Doppelreihen lassen sich zu gewöhnlichen Reihen umordnen.

Treppenfunktionen sind immer messbar.

Satz 10: Betrachtet werde Messbarkeit bezüglich einer fest gewählten Σ-Algebra von Teilmengen einer Menge X.

1. Sind Funktionen $f_j : X \to \mathbb{R}$ $(j \in \mathbb{N})$ messbar und ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass
$$\lim_{j \to \infty} f_j(x) = f(x)$$
für alle $x \in X$ gilt, so ist f messbar.

2. Jede messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ lässt sich als gleichmäßiger Limes einer Folge von Treppenfunktionen schreiben.

3. Sind $f_j : X \to \mathbb{R}$ $(j \in \{1 \dots m\})$ messbar und ist $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(x) = U(f_1(x), \dots, f_m(x))$ messbar.

4. Für reellwertige, messbare Funktionen f, g und $c \in \mathbb{R}$ sind auch cf, $f + g$, $|f|$, $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, f_+, f_- messbar.

5. Für komplexwertige, messbare Funktionen f, g und $c \in \mathbb{C}$ sind auch $f + g$, cf, $|f|$, $f \cdot g$ messbar. Ferner ist die Funktion
$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{falls } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } g(x) = 0 \end{cases}$$
messbar.

Beweis:

1. Für $a \in \mathbb{R}$ und $j, k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Mengen $M = f^{-1}((a,\infty)) = \{x \in X; f(x) > a\}$ und $M_{j,k} = f_j^{-1}((a + 1/k, \infty))$. Da $M_{j,k} \in \Sigma$ und
$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{j \geq l} M_{j,k} \,,$$
gehört auch M zur σ-Algebra Σ.

2. Wir setzen

$$M_{j,k} = f^{-1}\left(\left(\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right]\right), \quad V_{j,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{-j}{k}, \frac{1-j}{k}\right)\right),$$

$$g_k := \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j-1}{k}\chi_{M_{j,k}} + \frac{1-j}{k}\chi_{V_{j,k}}\right).$$

Dann sind die Funktionen g_k Treppenfunktionen, die wegen $|f - g_k| \le \frac{1}{k}$ gleichmäßig gegen f konvergieren.

3. Bestimme TF $f_{j,k}$ mit $\lim_{k\to\infty} f_{j,k}(x) = f(x)$. Dann sind $g_k = U(f_{1,k}(x), f_{2,k}(x), \ldots, f_{m,k}(x))$ ebenfalls TF (also messbar) und $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = U(f_1(x), \ldots, f_m(x))$.

4. Dies folgt aus 3., da man für jede der Behauptungen leicht eine passende stetige Funktion U findet. Für das Maximum nimmt man z.B. $U(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$.

5. Im reellen Fall ist $h(x) = \lim_{j\to\infty} f(x) \cdot h_j(g(x))$, wobei

$$h_j(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{falls } |t| \ge 1/j \\ j^2 \cdot t & \text{falls } |t| \le 1/j \end{cases}$$

stetig ist. Nach Satz 9.1. und 3. ist h dann messbar. Im komplexen Fall folgen nun alle Behauptungen aus Satz 9.4. durch Betrachtung von Realteil und Imaginärteil.

Bemerkung Ist (X, Σ, μ) ein vollständiger Maßraum, so reicht es in Satz 10.1. zu fordern, dass $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ μ-f.ü. gilt, denn in diesem Fall bleibt die Messbarkeit erhalten, wenn man messbare Funktionen auf Nullmengen willkürlich abändert.

Satz 11: Sei (X, Σ, μ) ein vollständiger Maßraum. Dann gelten:

1. Ist $f \in \mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$, so ist f messbar bezüglich Σ.

2. Ist f messbar bezüglich Σ und existiert $g \in \mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ mit $|f| \le g$ f.ü., so ist f integrierbar.

Beweis:

1. Folgt daraus, dass f f.ü. Limes von TF ist (Sätze 6, 7).

2. Es reicht aus, den Fall $f \ge 0$ zu betrachten (weil $f = (\mathrm{Re} f)_+ - (\mathrm{Re} f)_- + i\,((\mathrm{Im} f)_+ - (\mathrm{Im} f)_-)$ ist und jeder Summand messbar und betragsmäßig $\le g$ ist). Sei also $f \ge 0$. Wir setzen für $k, j \in \mathbb{N}$

$$M_{j,k} = f^{-1}\left(\left(\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right]\right), \quad f_k = \sum_{j=2}^{k^2} \frac{j-1}{k}\chi_{M_{j,k}}.$$

Wenn wir zeigen können, dass $\mu(M_{j,k}) < \infty$, dass also die f_k elementare Treppenfunktionen sind, so folgt $f \in \mathscr{L}$ aus dem Konvergenzsatz von Lebegue, denn $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ und g ist Majorante der f_k.
Es ist also nur noch $\mu(M_{j,k}) < \infty$ zu zeigen. Dazu halten wir $k, j \in \mathbb{N}$ mit $j \ge 2$ fest. Dann gilt $\chi_{M_{j,k}} \le k \cdot f \le k \cdot g$ f.ü. Nach den Sätzen 6 und 7 existiert eine Folge (g_l) in $\mathscr{L}'$ mit $\lim_{l\to\infty} g_l(x) = k \cdot g(x)$ f.ü. Dabei kann $g_l \ge 0$ angenommen werden (ersetze sonst g_l durch $(g_l)_+$). Betrachtet man $V_l = \{x \in M_{j,k}\,,\ g_l(x) > 1/2\}$ $U_l = \bigcup_{m=1}^{l} V_l$, so folgen nacheinander $V_l, U_l \in \Sigma$, $\mu(V_l) < \infty$, $\mu(U_l) < \infty$, $\chi_{U_l} \in \mathscr{L}$, $\mu(U_l) = I(\chi_{U_l}) \le k\,I(g)$ (weil $\chi_{U_l} \le \chi_{M_{j,k}} \le k\,g$), $\mu(\bigcup_{l=1}^{\infty} U_l) = \lim_{l\to\infty} \mu(U_l) \le k\,I(g)$. Zuletzt wurde eine Stetigkeiseigenschaft des σ-additiven Maßes μ benutzt. Da sich aber infolge der Definitionen von V_l und U_l die Mengen $\bigcup_{l=1}^{\infty} U_l$ und $M_{j,k}$ höchstens um eine Nullmenge unterscheiden, folgt $\mu(M_{j,k}) < \infty$.

Im Folgenden treten u.a. nichtvollständige Maßräume auf. Deshalb werden die Bezeichnungen etwas verallgemeinert.

Definitionen und Bezeichnungen: Wir gehen davon aus, dass (X, Σ, μ) ein Maßraum ist, der diesmal nicht vollständig zu sein braucht. Auf seiner Grundlage sei der Raum $\mathscr{L}$ der integrierbarn Funktionen konstruiert. (Es wird also die Konstruktion von $\mathscr{L}$ auf der Grundlage von (X, Σ, μ) anstelle von (X, Σ_0, μ_0) zugrundegelegt.)

1. Wir bezeichnen mit $\mathscr{L}_0(X, \Sigma, \mu)$ $(= \mathscr{L}_0(\Sigma) = \mathscr{L}_0(\mu))$ den Raum der komplexwertigen Σ-messbaren Funktionen auf X.

2. Der Raum $\mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ der (X, Σ, μ)-integrierbaren Funktionen wird definiert als

$$\mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu) = \{f \in \mathscr{L}\,,\ f \text{ ist } \Sigma\text{-messbar}\}\,.$$

Wenn klar ist, was gemeint ist, verwendet man wieder kürzere Bezeichnungen, wie $\mathscr{L}_1(X)$, $\mathscr{L}_1(\mu)$, $\mathscr{L}_1$.
Das Integral $I(f)$ der Funktion $f \in \mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ wird wieder geschrieben als

$$\int f \,\mathrm{d}\,\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\,\mu = \int_X f(x) \,\mathrm{d}\,\mu(x).$$

Für $f \in \mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ und $M \in \Sigma$ schreibt man wieder

$$\int_M f \,\mathrm{d}\,\mu = \int_X \chi_M \cdot f \,\mathrm{d}\,\mu\,.$$

Diese Bezeichnung verwendet man auch, wenn die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Element von $\mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ ist (f braucht also z.B. nicht auf ganz X definiert zu sein).
In diesem Falle heißt f μ-integrierbar auf M. f heißt messbar auf M, wenn die Funktion g messbar (bezüglich Σ) ist. Der Raum der auf M definierten μ-integrierbaren Funktionen wird wieder mit $\mathscr{L}_1(M)$ bezeichnet.

3. Ist $\rho \geq 0$ eine auf $M \in \Sigma$ messbare Funktion, die nicht über M integrierbar ist, so setzen wir $\int_M \rho \,\mathrm{d}\,\mu = \infty$.

Bemerkung Der Unterschied zwischen $\mathscr{L}$ und $\mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ ist nicht groß, da für jedes $f \in \mathscr{L}$ ein $g \in \mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ mit $f = g$ μ-f.ü. existiert. Deshalb bleiben die Sätze 2–8 und 11 sinngemäß auch für $\mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ im hier betrachteten allgemeineren Fall richtig.

Beweisidee für die Existenz von g: Ist $f \in \mathscr{L}$ reellwertig, so existieren nach den Sätzen 6 und 7 Funktionen $f_j \in \mathscr{L}'$ sowie eine Nullmenge N, so dass $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ gilt. Weiter findet man $M \in \Sigma$ mit $N \subset M$ und $\mu(M) = 0$. Setzt man $g_j = \chi_{X\setminus M} \cdot f_j$, so ist $g_j \in \mathscr{L}'$, der Grenzwert $\lim_{j\to\infty} g_j(x) = g(x)$ existiert für all $x \in X$, g ist also Σ-messbar und fast überall gleich f.

Satz 12 Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und sei $f : X \to \mathbb{C}$ eine Σ-messbare Funktion. Dann gilt $f(x) = 0$ μ-f.ü. genau dann wenn $f \in \mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ ist und $\int_X |f(x)| \,\mathrm{d}\,\mu(x) = 0$ gilt.

Beweis: Ist $f(x) = 0$ f.ü., so gehört $|f(x)|$ nach Konstruktion von $\mathscr{L}''$ zu $\mathscr{L}''$ und hat das Integral Null.
Ist $f \in \mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ mit $I(|f|) = 0$ gegeben, so betrachten wir für $k \in \mathbb{N}$ die Mengen $N_k = \{x \in X,\ |f(x)| > \frac{1}{k}\} \in \Sigma$. Wegen $\chi_{N_k} \leq k \cdot |f|$ folgt aus Satz 11, dass $\chi_{N_k} \in \mathscr{L}$ und $I(\chi_{N_k}) = 0$. Nach Hilfssatz 7 ist dann N_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge. Nach Satz 1 ist demzufolge $\{x \in X,\ |f(x)| \neq 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ eine Nullmenge.

Bemerkung Ist der Maßraum vollständig, so wird die Messbarkeitsvoraussetzung nicht benötigt, da dann jede Funktion, die f.ü. gleich Null ist, messbar ist.

Bemerkung Setzt man $f = \chi_N$, so erweist sich Hilfssatz 7 als Spezialfall von Satz 12.

Satz 13: Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Ist $\rho \geq 0$ eine Σ-messbare Funktion und sind $M_j \in \Sigma$ ($j \in \mathbb{N}$) paarweise disjunkt, so gilt mit $M = \cup_{j=1}^{\infty} M_j$

$$\int_M \rho \, \mathrm{d}\,\mu = \sum \int_{M_j} \rho \, \mathrm{d}\,\mu$$

d.h. durch $\nu(M) = \int_M \rho \, \mathrm{d}\,\mu$ wird ein σ-additives Maß ν auf Σ definiert.

Beweis: Ist $\int_M \rho \, \mathrm{d}\,\mu < \infty$, so ist das Integral nach Konvergenzsatz von Lebesgue (angewandt auf die Partialsummenfolge) gleich $\sum_{j=1}^{\infty} \int \chi_{M_j} \cdot \rho \, \mathrm{d}\,\mu$. Ist die Summe der Integrale $< \infty$, so ist sie nach B.Levi (wieder angewandt auf die Partialsummenfolge) gleich $\int \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{M_j} \cdot \rho \, \mathrm{d}\,\mu = \int \chi_M \cdot \rho \, \mathrm{d}\,\mu$. Sind beide Werte unendlich, so ist nichts zu beweisen.

Bezeichnung Das in Satz 13 definierte Maß ν wird mit $\nu = \rho \cdot \mu$ bezeichnet.

Satz 14: Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Sei $\rho \geq 0$ eine Σ-messbare Funktion. Dann ist eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ genau dann bezüglich $\nu = \rho \cdot \mu$ integrierbar, wenn $f \cdot \rho$ bezüglich μ integrierbar ist. In diesem Falle gilt

$$\int_X f d\nu = \int_X f \cdot \rho \, \mathrm{d}\,\mu$$

Beweis: Setzen $X_2 = \rho^{-1}(0), X_1 = X \backslash X_2$. Über X_2 sind beide Integrale gleich Null. Wir können also X durch X_1 ersetzen und $\rho(x) > 0$ voraussetzen. Dann stimmen Nullmengen bezüglich ν und μ nach Satz 12 überein. Ebenso stimmt dann die Messbarkeit überein, da dieselbe σ-Algebra betrachtet wird. Ist nun $f \in \mathscr{L}'$ (für ν) , $f = \sum c_j \, \chi_{M_j}$, so ist $\int f \, \mathrm{d}\,\nu = \sum c_j \int_{M_j} \rho \, \mathrm{d}\,\mu = \int f \cdot \rho \, \mathrm{d}\,\mu$. Durch Grenzübergang mit f.ü. monoton wachsenden Folgen und Anwendung des Satzes von B. Levi auf der rechten Seite folgt $\int f \, \mathrm{d}\,\nu = \int f \cdot \rho \, \mathrm{d}\,\mu$ für jedes $f \in \mathscr{L}''$ (für ν). Durch Übergang zur linearen Hülle folgt dann Gleichheit für alle $f \in \mathscr{L}_1(X, \Sigma, \nu)$. Vertauscht man die Rollen von μ und ν (immer noch im Falle $\rho(x) > 0$), so hat man außerdem für alle $g = \rho \cdot f \in \mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$, dass $\int g \, \mathrm{d}\,\mu = \int 1/\rho \cdot g \, \mathrm{d}\,\mu$, woraus die Behauptung folgt.

Beispiele: Auf diese Weise erhält man viele Wahrscheinlichkeitsmaße. Z.B. (Referenzfall, λ sei Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \lambda$$

oder für $M \in \Sigma$ mit $0 < \lambda(M) < \infty$

$$\frac{1}{\lambda(M)} \chi_M \cdot \lambda$$

Definition: Seien μ, ν Maße auf der σ-Algebra Σ von Teilmengen von X. ν heißt absolutstetig bezüglich μ, falls für jedes $M \in \Sigma$ mit $\mu(M) = 0$ gilt $\nu(M) = 0$.

Beispiel Ist (X, Σ, μ) ein Maßraum und ist $\rho \geq 0$ messbar bezüglich Σ, so ist $\nu = \rho \cdot \mu$ absolutstetig bezüglich μ .

Satz 15: (Radon- Nikodym) Seien μ und ν zwei σ -endliche Maße auf derselben σ-Algebra Σ von Teilmengen der Menge X. Ist ν absolutstetig bezüglich μ, so existiert eine bezüglich Σ messbare Funktion $\rho \geq 0$ mit $\nu = \rho \cdot \mu$.

Ein relativ übersichtlicher Beweis dieses Satzes wird später auf der Grundlage des Satzes von Riesz-Fischer aus der Hilbertraumtheorie zugänglich. (Vgl. z. B. Günther, Grundkurs Analysis)

0.1.c) Verallgemeinerung von Eigenschaften des n-dimensionalen Riemann-Integrals

Ausgangspunkt: Hier ist der Ausgangspunkt das für

$$Q_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n;\ a_j < x_j \le b_j \right\}$$

durch $\mu_0(Q_{a,b}) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ gegebene Maß. Die Fortsetzung des Maßes auf die von Σ_0 (definiert in 9.1.a), Beispiel 5) und den Nullmengen erzeugte σ-Algebra Σ heißt *Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{R}^n$ und wird mit λ bezeichnet. Der entsprechende Maßraum ist $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \lambda)$. Die Elemente von Σ nennt man auch Lebesgue-messbar oder einfach nur messbar (falls keine Verwechslung droht). Die Integrale

$$\int_M f \,\mathrm{d}\lambda = \int_M f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

werden auch einfach als $\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$ bzw., wenn $n = 1$ und M ein Intervall ist als $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnet. Dies wird durch folgenden Satz gerechtfertigt:

Satz 16: Ist M quadrierbar, so ist M meßbar und $\lambda(M)$ ist gleich dem Jordanschen Inhalt von M. Ist f Riemann-integrierbar oder sind f und $|f|$ Riemann-integrierbar im uneigentlichen Sinne, so ist f Lebesgue-integrierbar und beide Integrale stimmen überein.

Beweis: Wir verwenden weiterhin die Bezeichnungen $\mathscr{L}', \mathscr{L}'', \ldots$ aus Abschnitt 9.1.b). Die zweite Behauptung folgt daraus, dass man für eine reelle Riemann-integrierbare Funktion f Folgen g_j, h_j elementarer Treppenfunktionen mit $g_j \le f \le h_j$ und $\lim_{j\to\infty} I(h_j - g_j) = 0$ finden kann. Geht man zu monotonen Folgen $\widetilde{g}_l = \max\{g_1, \ldots, g_l\}, \widetilde{h}_l = \min\{h_1, \ldots, h_l\}$ über, so sieht man, dass (wegen Monotoniekriterium) die Genzwerte $\widetilde{g}_l(x) \nearrow g(x)$ und $\widetilde{h}_l(x) \searrow h(x)$ existieren und $g(x) \le f(x) \le h(x)$ erfüllen. Demzufolge ist $g \in \mathscr{L}''$ und $h \in \mathscr{L}'''$, wobei $I(g) = \lim_{l\to\infty} I(\widetilde{g}_l) = \lim_{l\to\infty} I(\widetilde{h}_l) = I(h)$ gleich dem Riemann-Integral von f ist . (Verwendet wurde, dass $g_l \le \widetilde{g}_l \le \widetilde{h}_l \le h_l$ und dass folglich $0 \le I(\widetilde{h}_l - \widetilde{g}_l) \le I(h_l - g_l)$ und dass die rechts stehende Folge von Integralen gegen Null strebt.) Nun folgt aus $g \le h$ und $I(h - g) = 0$, dass $g(x) = h(x)$ f.ü. gilt, dass also auch $g(x) = f(x)$ f.ü. gilt. Somit ist $f \in \mathscr{L}''$ und das Lebesgue-Integral von f ist gleich $\lim_{l\to\infty} I(\widetilde{g}_l)$, also gleich dem Riemann-Integral von f.

Die erste Behauptung ist der Speziallfall $f = \chi_M$. Die Behauptung für das uneigentliche Integral wird als Anwendung der Konvergenzsätze bewiesen (ÜA).

Dabei kann folgende allgemeine Definition des uneigentlichen Integrals verwendet werden.

Definition (uneigentliches absolut konvergentes Riemann-Integral): Sei $(M_j)_{j=1}^\infty$ eine aufsteigende Folge quadrierbarer Mengen $M_j \subset \mathbb{R}^n$ und sei $M = \cup_{j=1}^\infty M_j$. Ferner sei f eine wenigstens auf M definierte komplexwertige Funktion, die auf jeder der Mengen M_j Riemann-integrierbar sei. Das uneigentliche absolut konvergente Riemann-Integral $\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert und ist gleich $\lim_{j\to\infty} \int_{M_j} f(x)\,\mathrm{d}x$, falls $\lim_{j\to\infty} \int_{M_j} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ gilt.

Bemerkung: In dieser Definition wird also im Unterschied zur ursprünglichen Definition des uneigentlichen Integrals auf $\mathbb{R}$ verlangt, daß auch $|f|$ ein endliches uneigentliches Integral besitzt. Man erreicht dadurch, dass das Integral unabhängig von der speziellen Wahl der M_j wird.

Die Zurückführung auf niederdimensionale Integrale wird nun durch den *Satz von Fubini* geregelt (der eigentlich allgemeiner für sogenannte Produktmaße gilt, die aber über unseren Stoff hinausgehen).

Satz 17 (Fubini): Wir gruppieren die Variablen $u \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+k}$ als $u = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k$ und bezeichnen die entsprechenden Lebesgue-Maße auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k$ mit $\lambda_u, \lambda_x, \lambda_y$. Dann sind für eine λ_u-meßbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ folgende Bedingungen äquivalent:

1. $f(u)$ ist Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}^n$.
2. Für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$ ist $|f(x, y)|$ integrierbar bzgl. λ_y und es gibt eine integrierbare Funktion $G \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ mit $G(x) = \int_{\mathbb{R}^k} |f(x, y)| \,\mathrm{d}\, y$ für fast alle x.

In diesem Falle existiert $F \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ mit $F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) \,\mathrm{d}y$ für fast alle x. Für diese Funktion gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(u) \,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^m} F(x) \,\mathrm{d}x.$$

Bemerkungen: Die Integrale $\int_{\mathbb{R}^k} |f(x, y)| \,\mathrm{d}\, y$ bzw. $\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) \,\mathrm{d}y$ brauchen nicht für jedes x existieren (bzw. endlich sein). Die eventuelle Ausnahmemenge ist jedoch eine Nullmenge, auf die es bei der Integration nicht ankommt. Dort kann $F(x)$ bzw. $G(x)$ mit einem willkürlichen Wert genommen werden (z.B. 0). Vereinbart man, dass man auch Funktionen, die nur fast überall definiert und endlich sind, integrieren darf (indem man sie durch Abändern auf einer Nullmenge zu einer richtigen integrierbaren Funktion macht und das Integral der abgeänderten Funktion nimmt), so kann man den Satz folgendermaßen formulieren:

Umformulierung des Satze von Fubini: Wir gruppieren die Variablen $u \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+k}$ als $u = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k$ und bezeichnen die entsprechenden Lebesgue-Maße auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k$ mit $\lambda_u, \lambda_x, \lambda_y$. Dann sind für eine λ_u-meßbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ folgende Bedingungen äquivalent:

1. $f(u)$ ist Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}^n$.
2. $$\int_{\mathbb{R}^k} |f(x, y)| \,\mathrm{d}y < \infty \ (\lambda_x - \text{f.ü.}) \text{ und } \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^k} |f(x, y)| \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x < \infty.$$

Sind diese beiden zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(u) \,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Als Folgerung aus dem Satz darf man im letzten Integral die Integrationsreihenfolge vertauschen, wenn die zueinander äquivalenten Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind.
Den Beweis des Satzes von Fubini kann man z. B. in Heuser 2 oder Walter 2 finden.

Der Transformationssatz lässt sich auf den Fall Lebesgue-integrierbarer Funktionen verallgemeinern.

Satz 18 (Transformationssatz): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere offene Teilmenge und sei $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine injektive reguläre C^1-Abbildung ($\mathrm{Det}\, \phi' \neq 0$). Ferner sei f eine auf $\phi(\Omega)$ definierte komplexwertige Funktion. Dann ist f integrierbar auf $\phi(\Omega)$ gdw. $f(\phi(u)) \cdot |det\phi'(u)|$ auf Ω integrierbar im Lebesgueschen Sinne ist und es gilt

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(\phi(u)) \cdot |\mathrm{Det}\, \phi'(u)| \,\mathrm{d}u.$$

Beweisidee: Da Ref und Imf einzeln integriert werden, kann man gleich annehmen dass f reellwertig ist. Wir betrachten nun zunächst elementare TF, d.h. Elemente $f \in \mathscr{L}'$, wobei $\mathscr{L}'$ auf der Grundlage von (X, Σ_0, μ_0) aus 9.1.a), Beispiel 5 konstruiert wurde. Nimmt eine solche Funktion f außerhalb einer kompakten Teilmenge von Ω nur den Wert Null an, so ist die Transformationsformel für f aus der Theorie des Riemann-Integrals bekannt. Nun kann man bei gegebenem $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ mit $f = f \cdot \chi_\Omega$ eine Folge f_j solcher elementarer Treppenfunktionen mit $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ f.ü. und mit $\lim_{j\to\infty} I(|f_j - f|) = 0$ finden. (Verwende Sätze 6 und 7 sowie eine Ausschöpfung $\Omega = \cup_{l=1}^{\infty} K_l$, wobei $K_l \subset K_{l+1}$ kompakte Teilmengen von Ω sind, die zugleich Abschlüsse von endlichen Quadervereinigungen sind.) Dann folgt obige Gleichung durch Grenzübergang. Ist die Integrierbarkeit von $(f \circ \phi) \cdot |\mathrm{Det}\, \phi'|$ bekannt, so verwendet man das bisherige Resultat mit der inversen Abbildung ϕ^{-1} anstelle ϕ.

Es soll noch kurz eine im eindimensionalen gültige (schwierige) Verallgemeinerung der Newton-Leibniz-Formel beschrieben werden. Eine ausführliche Darstellung mit Beweisen findet man z. B. in Walter 2.

Definition (absolutstetige Funktion) Eine auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ gegebene reellwertige (oder komplexwertige) Funktion F heißt absolutstetig auf $[a, b]$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass für endlich viele paarweise disjunkte Teilintervalle $\{(a_j, b_j]\}_{j=1}^m$ von $[a, b]$ mit $\sum_{j=1}^m b_j - a_j < \delta$ stets gilt $\sum_{j=1}^m |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon$.
Solche Funktionen sind insbesondere stetig und von beschränkter Variation.

Allgemeines Beispiel (ÜA) Ist f auf $[a, b]$ integrierbar (d.h. $f \in \mathscr{L}_1([a, b])$), so ist $F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}\, t$ absolutstetig auf $[a, b]$.

Ist eine reellwertige Funktion F absolutstetig auf $[a, b]$, so kann man F (unter Verwendung der vollständigen Variation) als Differenz monoton wachsender absolutstetiger Funktionen schreiben. Eine monoton wachsende, absolutstetige Funktion F auf $[a, b]$ kann man dann auf $(-\infty, a)$ durch $F(a)$ und auf (b, ∞) durch $F(b)$ fortsetzen. Danach kann man auf der Grundlage von Beispiel 4 in 9.1.a) ein Maß ν mit $\nu((a, x]) = F(x) - F(a)$ definieren. Mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym kann man dann eine Funktion f (≥ 0) so finden, dass für $x \in [a, b]$ gilt $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}\, t$. Der folgende Satz beinhaltet viel mehr:

Satz 19 Ist F eine auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ gegebene absolutstetige Funktion, so existiert eine Funktion $f \in \mathscr{L}([a, b]$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}\, t.$$

Darüberhinaus ist F fast überall in $[a, b]$ differenzierbar und die Ableitung $F'(x)$ ist fast überall in $[a, b]$ gleich $f(x)$. (Insbesondere ist also die Funktion $f(x)$ in der Integraldarstellung von F bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmt.)

0.1.d) Sätze über Parameterintegrale

Satz 20 (Stetigkeitssatz): Sei (X, Σ, μ) ein (vollständiger) Maßraum und sei (Y, ρ) ein metrischer Raum. Sei $f(x, y)$ eine komplexwertige Funktion auf $X \times Y$, die für jedes feste y integrierbar sei und die für jedes feste x stetig von y abhänge. Gibt es eine von y unabhängige integrierbare Majorante $g(x)$ (d.h. $|f(x, y)| \leq g(x)$ μ-f.ü. bei jedem festen y), so wird durch $F(y) = \int_X f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x)$ eine stetige Abbildung $Y \to \mathbb{C}$ gegeben.

Beweis: Gilt $\lim_{j\to\infty} y_j = y$ in Y, so folgt mit $f_j(x) = f(x, y_j)$ und $f(x) = f(x, y)$, dass $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ und dass g eine integrierbare Majorante für die Funktionen f_j ist. Aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt nun $\lim_{j\to\infty} \int f_j(x)\, \mathrm{d}\, \mu(x) = \int f(x)\, \mathrm{d}\, \mu(x)$, d.h. $\lim_{j\to\infty} F(y_j) = F(y)$.

Beispiel (Stetigkeit der Fouriertransformierten): Für $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ wird die Fouriertransformierte $\widehat{f}$ definiert durch

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} \, \mathrm{d}t.$$

Diese hängt dann stetig von x ab. (Später kann man noch $\lim_{x \to \pm\infty} \widehat{f}(x) = 0$ beweisen).
Analoge Aussagen gelten für die Fouriertransformierte

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i\langle x,t \rangle} \, \mathrm{d}t$$

einer Funktion $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$.

Satz 21 (Differentiationssatz): Seien folgende Voraussetzungen erfüllt: (X, Σ, μ) sei ein (vollständiger) Maßraum, Y sei eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $f(x,y)$ sei eine komplexwertige Funktion auf $X \times Y$, für jedes feste $x \in X$ sei $f(x,y)$ stetig differenzierbar nach den y-Variablen, für jedes feste $y \in Y$ sei $f(x,y)$ μ-integrierbar, auf X gebe es eine integrierbare Funktion $g(x)$ mit $|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j}| \leq g(x) \quad (\forall (x,y) \in X \times Y)$.
Dann ist die Funktion $F(y) = \int_X f(x,y) \, \mathrm{d}x$ auf Y stetig partiell nach y_j differenzierbar, die Funktionen $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j}$ sind bei jedem festen $y \in Y$ μ-integrierbar und es gilt:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_j} = \int_X \frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j} \, \mathrm{d}\mu(x)$$

Beweisidee: Da Real- und Imaginärteil einzeln behandelt werden können, kann man gleich voraussetzen, dass f reellwertig ist. Aus dem Mittelwersatz der Differentialrechnung folgt dann, dass die bezüglich h in einer Umgebung der Null stetige Funktion

$$g(h,x,y) = \begin{cases} 1/h \ (f(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j + h, y_{j+1}, \ldots, y_n) - f(x,y)) & \text{falls } h \neq 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j} & \text{falls } h = 0 \end{cases}$$

bei bliebig gewählten zulässigen Werten für y und h die Funktion g zur Majorante hat. Nun folgt die behauptete Formel aus dem Stetigkeitssatz, wenn man in

$$\frac{1}{h} \left(F(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j + h, y_{j+1}, \ldots, y_n) - F(y) \right) = \int g(h,x,y) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

den Grenzwert für $h \to 0$ betrachtet. Aus dem Stetigkeitssatz folgt dann auch noch, dass $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_j} = \int \frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j} \, \mathrm{d}\mu(x)$ stetig von y abhängt.

Beispiel: (ÜA) Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist K messbar (χ_K ist sogar integrierbar). Für eine Lebesgue-integrierbare Funktion $\rho : K \to \mathbb{R}$ wird nun das Newton-Potential (der Massendichte ρ) durch

$$u(y) = \int_K \frac{\rho(x)}{|x - y|} \, \mathrm{d}x \quad (y \notin K).$$

gegeben. Dann ist u harmonisch in $\mathbb{R}^3 \setminus K$.
Dies gilt analog auch für eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^2$, für eine integrierbare Funktion $\rho : K \to \mathbb{R}$ und für das zweidimensionale Newton-Potential

$$u(y) = \int_K \rho(x) \ln |x - y| \, \mathrm{d}x.$$

Satz 22 (Holomorphiesatz): Sei $Y \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und sei $f(x, y)$ eine auf $X \times Y$ definierte komplexwertige Funktion. Sei $f(x, y)$ für jedes feste $x \in X$ eine auf Y holomorphe Funktion von y, sei $f(x, y)$ für jedes feste $y \in Y$ eine Σ-messbare Funktion und existiere eine integrierbare Funktion $g(x)$ auf X mit $|f(x, y)| \leq g(x)$ (überall oder wenigstens für jedes feste y μ-f.ü.). Dann ist die Funktion $F(y) = \int_X f(x, y) \, \mathrm{d}\,\mu(x)$ holomorph und erfüllt:

$$F'(y) = \int_X \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \, \mathrm{d}\mu(x)$$

Den Beweis kann man in Königsberger, Analysis 2 finden. Mit Hilfe der verallgemeinerten Integralformel von Cauchy für Ableitungen weist man zuerst nach, dass die komplexe Ableitung $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ zumindest lokal bezüglich y (d.h. in einer Umgebung eines beliebigen, aber für den Moment fest gewählten $y_0 \in Y$) eine von y unabhängige Majorante besitzt. Dann kann man ähnlich wie bei Satz 21 vorgehen.