Privatdozent Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/wiwi

MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER
ÜBUNGSBLATT NR. 7

Aufgabe 1 Entscheiden Sie, ob die folgenden Folgen Grenzwerte besitzen und bestimmen Sie sie gegebenenfalls! Sie können dabei die Regeln aus der Vorlesung benutzen.

$$a)\ \left(\frac{n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^+} \quad b)\ \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^+} \quad c)\ \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$$

$$d)\ \left(\frac{5^n+1}{5^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^+} \quad e)\ \left(\frac{7^n+1}{(-7)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^+} \quad f)\ \left(\frac{n!}{(n+1)!-n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$$

Aufgabe 2 Beweisen Sie: Es seien zwei konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ gegeben. Dann konvergiert die Folge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ gegen $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n - \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n$.

Aufgabe 3 Betrachten Sie die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+1)}\ .$$

Rechnen Sie diese für $n = 1, 2, 3, 4$ aus und stellen Sie eine Vermutung auf, was allgemein der Wert ist! Beweisen Sie dann Ihre Vermutung (z.B. mit vollständiger Induktion)! Überlegen Sie sich schließlich, was

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\cdot(i+1)}$$

ist!

Aufgabe 4 Betrachten Sie die Polynomfunktion f, die durch $f(x) := x^3 + 3x + 7$ gegeben ist!

a) Bestimmen Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - 7| \leq \varepsilon$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq \delta$!

b) Bestimmen Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - 11| \leq \varepsilon$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 1| \leq \delta$!

c) Bestimmen Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) + 7| \leq \varepsilon$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x + 2| \leq \delta$!

d) Bestimmen Sie für jedes $S \in \mathbb{R}$ ein $X \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq S$ für $x \geq X$!

e) Bestimmen Sie für jedes $S \in \mathbb{R}$ ein $X \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq S$ für $x \leq X$!

Was bedeuten diese Aussagen für die Existenz und die Werte der Grenzwerte von $f(x)$ für $x \longrightarrow 0; 1; -2; \infty; -\infty$? Was bedeutet es für die Stetigkeit von $f(x)$ an $x = 0; 1; -2$? (Die Semikolons sind nur zum Trennen da – wie in der Schule.)

Hinweis. Beachten Sie, dass wir hier – wie schon zuvor bei ähnlichen Aufgaben – nicht die "optimale" Lösung suchen. In a) beispielsweise ist nicht gefragt, zu jedem ε das größtmögliche δ zu finden, sondern überhaupt eins anzugeben. Dies gilt natürlich auch für die nächste Aufgabe.

Aufgabe 5 Betrachten Sie die durch $f(x) := \frac{1}{x-1} + x^2$ auf $D_f := \mathbb{R}\backslash\{1\}$ gegebene Funktion.

a) Bestimmen Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - 5| \leq \varepsilon$ für $x \in D_f$ mit $|x - 2| \leq \delta$!

b) Bestimmen Sie für jedes $S \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ mit $f(x) \geq S$ für $x > 1$ mit $|x - 1| \leq \delta$!

c) Bestimmen Sie für jedes $S \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ mit $f(x) \leq S$ für $x < 1$ mit $|x - 1| \leq \delta$!

d) Bestimmen Sie für jedes $S \in \mathbb{R}$ ein $X > 0$ mit $f(x) \geq S$ für $x \geq X$!

Was bedeuten diese Aussagen für die Existenz und die Werte der Grenzwerte von $f(x)$ für $x \longrightarrow 0; 2; \infty$?

Hinweis. Die Bedingung an x in b) kann man auch so formulieren: $x \in (1, 1 + \delta]$. Eine analoge Formulierung gibt es auch für die Bedingung in c).

Abgabe. Am Freitag, 16.1., in der großen Übung oder bis dahin in den Übungsgruppen