Privatdozent Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/wiwi

MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER
ÜBUNGSBLATT NR. 6
WEIHNACHTSÜBUNGSBLATT

Lektüre Um den Vorlesungsstoff zu wiederholen und zu vertiefen und um ein paar Aspekte der Schulmathematik zu wiederholen empfehle ich die Lektüre der folgenden Abschnitte aus den Büchern über die Ferien:

- Mathematik 11 aus der DDR: Abschnitte A1 - 8, B1 - 7 und C11
- Hahn-Dzewas Mathematik 11: Kapitel 1 - 3
- Hahn-Dzewas Analysis: Abschnitte 1.6 und 5.1 sowie der Anhang

Diese Abschnitte umfassen den gesamten Vorlesungsstoff und auch noch den Stoff der ersten Vorlesung im nächsten Jahr. Genauer werden wir in dieser ersten Vorlesung die noch nicht behandelten Aspekte von Kapitel 1 von Hahn-Dzewas Mathmeatik 11 beziehungsweise die Abschnitte A4, A6, B6 und B7 aus Mathematik 11 aus der DDR behandeln.
Ein Tipp hierzu: In der Mathematik sollte man sich ständig fragen, ob man ein Konzept auch verstanden hat. Die Bücher sind gut geschrieben, aber man sollte trotzdem aufpassen, dass man nicht zu schnell liest. Wichtig ist es, selbstkritisch zu sein und sich zu fragen, ob man den Stoff mit eigenen Worten erklären kann.

Aufgabe 0 Machen Sie alle Übungsaufgaben, die Sie noch nicht gemacht haben! Legen Sie dazu die Lösungen aus den großen Übungen weit weg.

Aufgabe 1

a) Rechnen Sie in das 10er System um:

$$(4323)_7 \qquad (424)_6$$

b) Rechnen Sie die folgende Zahl aus dem 10er System in das 5er und das 6er System um: 5465

c) Rechnen Sie jeweils in den angegebenen Systemen:

$$(2342)_7 + (524)_7 + (622)_7 \qquad (1031)_6 - (212)_6 - (115)_6$$

$$(231)_5 \cdot (24)_5 \qquad (102102)_4 : (3)_4$$

Aufgabe 2 Der Kundenstamm einer Firma wächst von 10 000 Ende des Jahres 2013 auf 20 000 Ende des Jahres 2014.

a) Geben Sie das durchschnittliche monatliche additive Wachstum mittels einer Formel angewandt auf die gegebenen Daten an!

b) Geben Sie approximativ und explizit das durchschnittliche monatliche additive Wachstum an, wobei Sie auf ganze Zahlen runden!

c) Geben Sie die durchschnittliche monatliche Wachstumsrate mittels einer Formel angewandt auf die gegebenen Daten an!

d) Geben Sie approximativ und explizit die durchschnittliche monatliche Wachstumsrate in der Form $x\%$ an, wobei x auf zwei Stellen hinter dem Komma gerundet ist! Verwenden Sie zur Berechnung der Approximation das Halbierungsverfahren (oder eine geeignete Variante für das 10er System) angewandt auf eine geeignete Funktion!

Für den Teil d) können Sie einen Taschenrechner benutzen, aber nur innerhalb des Halbierungsverfahrens.

Aufgabe 3 Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit dem Summenzeichen und beweisen Sie sie jeweils für $n \in \mathbb{N}^+$!

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Aufgabe 4 (Aufgabe 16a) auf S. 171 des Buchs Analysis) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *linear*, falls sie von der Form $x \mapsto ax + b$ mit festen reellen Zahlen a, b ist.

Bestimmen Sie alle solchen Funktionen, die bijektiv und identisch mit ihrer Umkehrfunktion sind, d.h. für die $f = f^{-1}$ gilt!

Aufgabe 5

a) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \begin{cases} 10 & \text{für } n \leq 100 \\ \frac{1}{(n-100)^2} & \text{für } n > 100 \end{cases}$$

gegen 0 konvergiert, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein geeignetes N mit

$$|a_n| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ bestimmen!

b) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ mit $a_n := n^2 + (-1)^n \cdot n$ gegen ∞ divergiert, indem Sie zu jedem S ein geegnetes N mit

$$a_n \geq S$$

für alle $n \geq N$ angeben!

Aufgabe 6 Bestimmen Sie das Supremum (d.h. die kleinste obere Schranke) der folgenden Mengen:

$$\{x \in \mathbb{R} \,|x^2 \leq 2\} \qquad \{x \in \mathbb{R} \,|x^2 < 2\}$$
$$\{x \in \mathbb{Q} \,|x^2 \leq 2\} \qquad \{x \in \mathbb{Q} \,|x^2 < 2\}$$

Aufgabe 7 Wir haben in der Vorlesung definiert:
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen eine reelle Zahl a, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N}^+ \text{ mit } |a_n - a| \leq \varepsilon \text{ für alle } n \geq N$$

In den Büchern steht allerdings, dass man sagt, die Folge konvergiere gegen a, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N}^+ \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N$$

Überlegen Sie sich (d.h. beweisen Sie), dass diese beiden Aussagen äquivalent zueinander sind. Das heißt: Es macht keinen Unterschied, welche Definition wir verwenden.

Hinweis. Sie müssen hier zeigen: Wenn die erste Aussage gilt, gilt auch die zweite, und wenn die zweite Aussage gilt, gilt auch die erste. Setzen Sie dafür jeweils voraus, dass die entsprechende Aussage gilt und zeigen Sie dann jeweils die andere!

Aufgabe 8* Beweisen Sie die folgende Behauptung aus der Vorlesung:
Es sei eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ und eine reelle Zahl a gegeben. Dann sind äquivalent:

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ konvergiert gegen a.

b) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^+} a_n = a$

Achtung. Es ist wichtig, dass die Folge als monoton wachsend vorausgesetzt wurde. Ohne diese Voraussetzung gibt es keinen allgemeinen Zusammenhang wie angegeben.

Abgabe. Am Montag, 5.1., in der Vorlesung

Ein fohes Weihnachtsfest

und ein gutes und erfolgreiches neues Jahr!