Privatdozent Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/wiwi

MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER
ÜBUNGSBLATT NR. 3

Aufgabe 1 In der Vorlesung haben wir gezeigt:
Es seien a, b, c beliebige fest gewählte Zahlen. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ mit:
Für alle Zahlen x mit $|x| \geq C$ gilt

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{3}{2} \,.$$

Wir haben so eine Konstante C sogar explizit angegeben.
Geben Sie nun eine Konstante $C > 0$ an, mit der gilt:

Für alle Zahlen x mit $|x| \geq C$ gilt

$$\frac{3}{4} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{5}{4} \,.$$

Was können wir daraus schließen, wenn wir die Funktion $x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$ mit der Funktion $x \mapsto x^3$ für x "mit großem Absolutbetrag" vergleichen wollen? (Beachten Sie hierzu die Aussagen zu diesen Funktionen aus der Vorlesung.)

Hinweis. Es ist hier nicht das "optimale", d.h. das kleinste C gefragt, mit dem die Aussage gilt. Es reicht aus, wenn Sie irgendein passendes C angeben.

Aufgabe 2 Es ist intuitiv klar, dass sich für x mit größer werdendem Absolutbetrag der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}$$

der Geraden annähert, die durch $y = 1$ gegeben ist. In dieser Aufgabe gehen wir noch einen Schritt weiter in diese Richtung. Damit es nicht zu schwierig wird, betrachten wir ein konkretes Beispiel.

Geben Sie für jede Zahl $\varepsilon > 0$ ein $C > 0$ an, mit welchem gilt:

Für alle Zahlen x mit $|x| \geq C$ gilt

$$1 - \varepsilon \leq 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \leq 1 + \varepsilon \,.$$

Was können wir nun daraus schließen, wenn wir die Funktionen $x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$ und $x \mapsto x^3$ für x mit großem Absolutbetrag miteinander vergleichen wollen?

Hinweis. Die Zahl C kann von ε abhängen. Intiuitiv ist klar, dass ein kleineres ε ein größeres C erfordert.

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie mit dem in der Vorlesung vorgestellten Intervallteilungsverfahren approximativ eine Lösung der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$$

auf zwei Stellen hinter dem Komma genau! Starten Sie dabei von den Werten $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$! (Wie in der Vorlesung angegeben, ist es sinnvoll, das Intervall nicht immer strikt zu halbieren.)

b) Berechnen Sie nun approximativ mit dem Verfahren mit strikter Halbierung eine Lösung der Gleichung

$$x^3 + x^2 + (100)_2\, x - (1000)_2 = 0$$

im 2-er System auf 5 Stellen hinter dem Komma genau, startend von $x_1 = 0$ und $x_2 = (100)_2$! Rechnen Sie hierbei wirklich im 2-er System. Stellen Sie abschließend die Gleichung und Ihr Ergebnis im 10-er System dar!

Aufgabe 4 Anton und Berta spielen ein Spiel: Zunächst vereinbaren sie eine natürliche Zahl $S \geq 1$.
Dann denkt sich Anton eine ganze Zahl a aus, die mindestens 1 und höchstens S sein darf. (Die Grenzen sind erlaubt.) Berta darf nun Anton Fragen der Form

> "Ist deine Zahl gleich b oder größer?"

stellen oder eine Zahl raten. Anton muss darauf wahrheitsgemäß antworten. Das Spiel ist beendet, wenn Berta die geheime Zahl geraten hat.
Berta fragt sich, was – in Abhängigkeit von S – die geringste Anzahl von Fragen ist, die sie unabhängig von der geheimen Zahl stellen muss, wenn sie eine gute Spielstrategie hat.

a) Geben Sie eine Spielstrategie an, bei der Ihrer Meinung nach Berta unabhängig von der geheimen Zahl möglichst wenig Fragen stellen muss! Hierbei ist S gegeben (aber trotzdem beliebig), d.h. die Spielstrategie kann von S abhängen. Wie lautet das Maximum der Fragen, die Berta stellen muss, in Abhängigkeit von S?

b) Argumentieren Sie, dass für jedes S Ihre entsprechende Spielstrategie optimal ist! Dies bedeutet: Es gibt keine Spielstrategie, mit der Berta stets mit weniger Fragen auskommt.

Abgabe. Am Freitag, 21.11., in der großen Übung oder bis dahin in den Übungsgruppen