Privatdozent Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/wiwi

MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER II
ÜBUNGSBLATT NR. 3

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass

a) die Funktion sin auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend ist,

b) die Funktion cos auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist,

c) die Funktion tan auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend ist.

Folgern Sie, dass die Funktionen auf den angegebenen Bereichen injektiv sind.

Aufgabe 2 Die Arcus-Funktionen sind Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, d.h. von $\sin, \cos$ und tan, eingeschränkt auf die oben angegebenen Bereiche. Dies heißt: arcsin ist die Umkehrfunktion von $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$, arccos ist die Umkehrfunktion von $\cos|_{[0,\pi]}$, arctan die Umkehrfunktion von $\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$.

a) Wie lauten die Definitionsbereiche der drei Arcus-Funktionen?

b) Argumentieren Sie geometrisch, dass stets $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ ist.

c) Zeigen Sie mittels der Formel $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$:

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2} = \cos(\arcsin(x)) \; .$$

d) Zeigen Sie: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

e) Zeigen Sie der Reihe nach: $\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Hinweis zu d. Wie berechnet man nochmal die Ableitung einer Umkehrfunktion?

Aufgabe 3 Betrachten Sie für positive Konstanten a, b die Funktion f auf $\mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) := x^a \cdot y^b$.

a) Bestimmen Sie die beiden partiellen Ableitungen von f und den Gradienten von f.

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung in Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Bestimmen Sie am Punkt $(1, 2)$ die lineare Approximation an f.

d) Geben Sie für den Punkt $(1, 2)$ die Tangente an die Höhenlinie auf die folgenden zwei Arten an: als parametrisierte Gerade und mittels einer Gleichung.

Aufgabe 4 In der Vorlesung haben wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2} \quad , \quad f(0,0) := 0$$

betrachtet. Wir haben gesehen, dass die Funktion an $(0,0)$ nicht stetig ist. Nach dem "wichtigen Satz" aus der Vorlesung können somit nicht beide partiellen Ableitungen stetig sein. Es soll nun überprüft werden, dass dies tatsächlich so ist.

a) Berechnen sie $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) Berechnen sie $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$.

c) Berechnen Sie $\lim\limits_{y \longrightarrow 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ und schließen Sie, dass $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht stetig in 0 ist.

Aufgabe 5 (Ab Freitag, 8.5.) Wir betrachten die Funktion f aus Aufgabe 4 eingeschränkt auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Hier ist die Funktion stetig differenzierbar. (Das müssen Sie nicht zeigen.)

a) Zeigen Sie: Die Funktionswerte liegen im Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen.

c) Bestimmen Sie die Funktionswerte an den kritischen Stellen.

d) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Maximal- und Minimalstellen der Funktion mittels a), b) und c). (Sie müssen hier nicht die zweiten Ableitungen betrachten.)

Abgabe. Am Freitag, 15.5., in der Übung oder bis dahin in den Übungsgruppen