Privatdozent Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/wiwi

MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER II
ÜBUNGSBLATT NR. 2

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Abstände zwischen je zwei der folgenden vier Punkte im $\mathbb{R}^3$:

$$P = (1, 0, -1) \quad , \quad Q = (3, -1, 2) \quad , \quad R = (0, 4, -3) \quad , \quad S = (2, -3, 3)$$

Hinweis. Es ist sinnvoll, mit Spaltenvektoren zu rechnen.

Aufgabe 2 Wir betrachten einen Körper bestehend aus einem Radionuklid und nicht radioaktiven Elementen. Die Masse des Radionuklids erfüllt in Abhängigkeit der Zeit die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda m(t) \ ,$$

wobei die soganannte *Zerfallskonstante* λ nur vom Radionuklid abhängt.
Die *Halbwertszeit* ist die Zeit, nach der aufgrund radioaktiven Zerfalls die Masse des Radionuklids auf die Hälfte gesunken ist. Wir bezeichnen sie mit $t_{1/2}$.

a) Erläutern Sie, dass hier exponentielles Wachstum mit negativer stetiger Wachstumsrate vorliegt, und geben Sie den Zusammenhang zwischen λ und der stetigen Wachstumsrate an!

b) Geben Sie die Masse des Radionuklids in Abhängigkeit der Zeit, λ und $m(0)$ an!

c) Wie kann die Ableitung $\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}$ physikalisch interpretiert werden? Wie lautet sie explizit in Abhängigkeit der Zeit, λ und $m(0)$?

d) Geben Sie eine Formel an, die λ in Abhängigkeit von $t_{1/2}$ angibt!

Aufgabe 3 Führen Sie den Beweis des Satzes aus der Vorlesung vom 13.4. zu Ende! Lassen Sie sich dabei von der graphischen Veranschaulichung inspirieren!

Aufgabe 4

a) Beweisen Sie mittels des ersten Satzes in der ersten Vorlesung die folgende Aussage:

Es sei eine differenzierbare Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben, wobei I ein Intervall ist. Es gelte $f' = 0$ oder mit anderen Worten: Für alle $x \in I$ ist $f'(x) = 0$.

Dann ist f konstant, d.h. es gibt eine Zahl c mit $f(x) = c$ für alle $x \in I$.

b) Beweisen Sie die folgende Aussage:

Es seien zwei Funktionen g, h auf einem (einzigen) Intervall I mit Werten in $\mathbb{R}$ gegeben. Die beiden Funktionen g und h seien differenzierbar und es gelte $g' = h'$ oder mit anderen Worten: Für alle $x \in I$ ist $g'(x) = h'(x)$.

Dann gibt es eine Zahl c mit $g = h + c$, d.h. $g(x) = h(x) + c$ für alle $x \in I$.

Hinweis zu b). Betrachten Sie die Differenz $g-h$ der Funktionen! Wenden Sie die Aussage in Teil a) auf diese Differenz an!

Korrektur. Ich hatte den genannten ersten Satz in der ersten Vorlesung *Zwischenwertsatz* genannt. Er heißt aber *Mittelwertsatz*. Der Zwischenwertsatz ist dieser Satz:

Eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Abgabe. Am Montag, 4.5., in der Vorlesung oder bis dahin in den Übungsgruppen