Privatdozent Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/wiwi

MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER II
MUSTERLÖSUNG ZU ÜBUNGSBLATT NR. 4

Kursive Texte in Klammern sind Kommentare.

Aufgabe 3

(i)
Wir haben

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - y - 1 \\ 2y - x \end{pmatrix} .$$

a) Die kritischen Stellen sind die Stellen (x, y) mit

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Diese Gleichung führt auf das System

$$\begin{array}{rcrl} 2x & - & y & = 1 \\ -x & + & 2y & = 0 \end{array}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem, das man mit dem Gauß-Algorithmus lösen kann. Die eindeutig bestimmte Lösung ist $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Dies ist die eindeutige kritische Stelle.

b) Es ist $f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{3} - 6 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 6 = -\frac{19}{3}$.

c) Es ist $\partial_x\partial_x f = 2, \partial_x\partial_y f = -1, \partial_y\partial_y f = 2$.
(Hier kann man den Test $\partial_x\partial_y f = \partial_y\partial_x f$ machen, wenn dies nicht stimmt, hat man sich verrechnet.)
Somit ist $\partial_x\partial_x f = 2 > 0, \partial_x\partial_x f \cdot \partial_y\partial_y f - (\partial_y\partial_x f)^2 = 4 - 1 = 5 > 0$.
Folglich ist $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ eine lokale Minimalstelle.

(ii)
Wir haben

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y \\ -3y^2 + 3x \end{pmatrix} .$$

a) Eine Stelle (x, y) ist genau dann eine kritische Stelle, wenn

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dies ist äquivalent zu $3x^2 + 3y = 0$, $-3y^2 + 3x = 0$, d.h. $y = -x^2$, $x = y^2$.
Es sei nun (x, y) eine kritische Stelle. Dann ist $y = -y^4$ und somit $y = 0$ oder $1 = -y^3$.
Letzteres hat die eindeutige Lösung $y = -1$.
Wenn $y = 0$ ist, ist $x = 0$, wenn $y = -1$ ist, ist $x = 1$.

(Wir haben gezeigt: Wenn (x, y) eine kritische Stelle ist, ist $(x, y) = (0, 0)$ oder $(x, y) = (1, -1)$. Nun muss man noch überprüfen, dass $(0, 0)$ und $(1, -1)$ auch kritische Stellen sind. Zumindest muss man schreiben, dass dies der Fall ist.)
Durch Einsetzen in ∇g sieht man auch, dass $(0, 0)$ und $(1, -1)$ kritische Stellen sind.

b) Es ist $g(0, 0) = 0, g(1, -1) = 1 + 1 - 3 = -1$.

c) Es ist $\partial_x\partial_x g = 6x, \partial_x\partial_y g = 3, \partial_y\partial_y g = -6y$.
An $(0, 0)$ ist $\partial_x\partial_x g \cdot \partial_y\partial_y g - (\partial_x\partial_y g)^2 = 0 - 9 = -9 < 0$. Somit ist $(0, 0)$ eine Sattelstelle.
An $(1, -1)$ ist $\partial_x\partial_x g = 6 > 0$ und $\partial_x\partial_x g \cdot \partial_y\partial_y g - (\partial_x\partial_y g)^2 = 36 - 9 = 27 > 0$. Somit ist $(1, -1)$ eine lokale Minimalstelle.

(iii)
Wir haben

$$\nabla h = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3 \\ 3y^2 - 12 \end{pmatrix} .$$

a) Eine Stelle (x, y) ist genau dann eine kritische Stelle, wenn

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $3x^2 = 3$ und $3y^2 = 12$. Dies ist äquivalent zu $x = \pm 1, y = \pm 2$. Die kritischen Stellen sind somit $(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$.

b) Es ist
$h(1, 2) = 1 + 8 - 3 - 24 + 20 = 2$,
$h(1, -2) = 1 - 8 - 3 + 24 + 20 = 34$,
$h(-1, 2) = -1 + 8 + 3 - 24 + 20 = 6$,
$h(-1, -2) = -1 - 8 + 3 + 24 + 20 = 38$.

c) Es ist $\partial_x\partial_x h = 6x,\ \partial_x\partial_y h = 0,\ \partial_y\partial_y h = 6y$.
An $(1, 2)$ ist $\partial_x\partial_x h = 6 > 0$ und $\partial_x\partial_x h \cdot \partial_y\partial_y h - (\partial_x\partial_y h)^2 = 6 \cdot 6 \cdot 2 = 72 > 0$. Somit ist $(1, 2)$ eine lokale Minimalstelle.
An $(1, -2)$ ist $\partial_x\partial_x h \cdot \partial_y\partial_y h - (\partial_x\partial_y h)^2 = -72 < 0$. Somit ist $(1, -2)$ eine Sattelstelle.
An $(-1, 2)$ ist $\partial_x\partial_x h \cdot \partial_y\partial_y h - (\partial_x\partial_y h)^2 = -72 < 0$. Somit ist $(-1, 2)$ eine Sattelstelle.
An $(-1, -2)$ ist $\partial_x\partial_x h = -6 < 0$ und $\partial_x\partial_x h \cdot \partial_y\partial_y h - (\partial_x\partial_y h)^2 = 6 \cdot 6 \cdot 2 = 72 > 0$. Somit ist $(-1, -2)$ eine lokale Maximalstelle.

Aufgabe 4

Es folgt eine Lösung von Aufgabe c). Grundsätzlich gilt: Um die Maximal- und Minimalstellen zu ermitteln, muss man wie folgt vorgehen: Erstens betrachet man den Rand der durch die Nebenbedingung definierten Menge und zweitens betrachtet man das Innere. Für beide Bereiche bestimmt man "Kandidaten" für Extremstellen. Schließlich nimmt man diejenigen Stellen unter den Kandidaten mit dem größten bzw. dem kleinsten Funktionswert.

a) Wir betrachten zunächst f unter der Nebenbedingung $4x^2 + y^2 = 4$. *(Wir untersuchen f auf dem Rand des durch die Nebenbedingung $4x^2 + y^2 \leq 4$ gegebenen Bereichs.)*

Es sei $g(x,y) := 4x^2 + y^2$. Dann ist

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix} .$$

Es sei nun (x,y) eine Extremstelle (unter der Nebenbedingung). Dann ist $\nabla g(x,y) = \underline{0}$ oder es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(\nabla f)(x,y) = \lambda \cdot (\nabla g)(x,y) .$$

(Hier kann man auch einen Ansatz mit ... = $-\lambda$... machen, das macht keinen Unterschied.)

Der erste Fall tritt nicht auf. Denn dies würde bedeuten, dass $x = y = 0$ ist, und dies steht im Widerspruch zur Nebenbedingung.

Also ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix} .$$

Man sieht, dass $\lambda \neq 0$ ist. Es folgt: $(x,y) = \frac{1}{\lambda} \cdot (\frac{1}{8}, \frac{3}{2})$.

Eingesetzt in die Nebenbedingung:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda^2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{9}{4} = 4 \\ \Longrightarrow \quad & \frac{1}{16} + \frac{9}{4} = 4\lambda^2 \\ \Longrightarrow \quad & \frac{37}{16} = 4\lambda^2 \\ \Longrightarrow \quad & \lambda = \pm\frac{\sqrt{37}}{8} \end{aligned}$$

Dies führt auf: $(x,y) = \pm\frac{8}{\sqrt{37}} \cdot (\frac{1}{8}, \frac{3}{2}) = \pm(\frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{12}{\sqrt{37}})$.

Die Funktionswerte lauten: $f(\frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{12}{\sqrt{37}}) = \frac{37}{\sqrt{37}} = \sqrt{37}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{37}}, -\frac{12}{\sqrt{37}}) = -\sqrt{37}$.

Nun betrachten wir f unter der Nebenbedingung $4x^2 + y^2 < 4$. *(Wir untersuchen f im Inneneren des Bereichs.)* Jede Extremstelle ist nun eine kritische Stelle von f. Da $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist, gibt es keine kritischen Stellen von f. Somit hat f auch keine Extremstellen unter der Nebenbedingung $4x^2 + y^2 < 4$.

Wir wissen (siehe Hinweis auf dem Blatt), dass die Funktion unter der Nebenbedingung eine Minimalstelle und eine Maximalstelle hat. Diese können nun nur $\pm(\frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{12}{\sqrt{37}})$ sein.

<u>Konklusion.</u> Die Stelle $(\frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{12}{\sqrt{37}})$ ist eine (globale) Maximalstelle und die Stelle $(-\frac{1}{\sqrt{37}}, -\frac{12}{\sqrt{37}})$ ist eine (globale) Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $4x^2 + y^2 \leq 4$.

b) Wir betrachten zunächst f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.
Es sei $g(x, y) := x^2 + y^2$.
Nun ist

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad , \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} .$$

Es sei (x, y) eine Extremstelle unter der Nebenbedingung. Nun ist $(\nabla g)(x, y) = \underline{0}$ oder es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(\nabla f)(x, y) = \lambda \cdot (\nabla g)(x, y) .$$

Der erste Fall kann nicht eintreten. Denn dies würde bedeuten, dass $x = y = 0$ ist, was der Nebenbedingung widerspricht.
Also gibt es ein λ mit

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} .$$

Es folgt:

$$y = \lambda \cdot 2x = 2\lambda x = 2\lambda \cdot \lambda \cdot 2y = 4\lambda^2 y$$

Ebenso:

$$x = \lambda \cdot 2y = 2\lambda y = 2\lambda \cdot \lambda \cdot 2x = 4\lambda^2 x$$

Wenn also $y \neq 0$ ist, ist $4\lambda^2 = 1$ und wenn $x \neq 0$ ist, ist auch $4\lambda^2 = 1$.
Nun ist aber immer $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ (unter der Nebenbedingung). Somit ist also

$$4\lambda^2 = 1 .$$

Also:

$$\lambda = \pm\frac{1}{2}$$

Es sei zunächst $\lambda = \frac{1}{2}$. Dann ist $x = y$. Die Nebenbedingung ergibt: $2x^2 = 1$, d.h. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir erhalten:

$$(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1) \text{ oder } (x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, -1)$$

Es sei nun $\lambda = -\frac{1}{2}$. Dann ist $x = -y$. Die Nebenbedingung ergibt wieder: $2x^2 = 1$, d.h. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir erhalten:

$$(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, -1) \text{ oder } (x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, -1)$$

Die Funktionswerte lauten:

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1)) = \frac{1}{2} \ , \ f(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, -1)) = \frac{1}{2} \ , \ f(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, -1)) = -\frac{1}{2} \ , \ f(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, 1)) = -\frac{1}{2}$$

Wir betrachten nun f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 < 1$. Die Extremstellen sind wiederum kritische Stellen. So eine Stelle erfüllt

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dies impliziert $(x, y) = (0, 0)$.

Nun ist $f(0,0) = 0$ und somit ist $(0,0)$ keine Maximal- und keine Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 < 1$. *(Wir haben ja auf dem Rand schon Stellen mit größerem und kleinerem Funktionswert gefunden.)* Unter dieser Nebenbedingung hat f also keine Extremstellen.

<u>Konklusion.</u> Die Minimalstellen von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 1$ sind $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,-1)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,-1)$ und die Maximalstellen von f unter der gegebenen Nebenbedingung sind $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,1)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1,-1)$.