Privatdozent Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/wiwi

MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER II
MUSTERLÖSUNG ZU ÜBUNGSBLATT NR. 3

Aufgabe 4

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y \cdot (x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2}$.

Analog: $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-y^2x+x^3}{(x^2+y^2)^2}$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \dfrac{y^3}{(y^2)^2} = \dfrac{1}{y}$.

c) Es ist $\lim\limits_{y \longrightarrow 0^+} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \infty$, $\lim\limits_{y \longrightarrow 0^-} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -\infty$.

Also existiert $\lim\limits_{y \longrightarrow 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ nicht.

Kommentar. An dieser Stelle kann man die Aufgabenstellung kritisieren: Wenn der Grenzwert nicht existiert, kann man ihn auch nicht berechnen. Es wäre besser gewesen, zu schreiben:

"Überprüfen Sie, ob $\lim\limits_{y \longrightarrow 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ existiert und berechnen Sie dies gegebenenfalls."

Man sieht, dass scheinbare "Verkomplizierungen" wie die alternative (und bessere) Aufgabenstellung durchaus sinnvoll sein können.

Aufgabe 5

a) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ beliebig.
Es sind äquivalent:

- $f(x,y) \leq \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{xy}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}$
- $2xy \leq x^2+y^2$
- $0 \leq x^2 - 2xy + y^2$
- $0 \leq (x-y)^2$

Letzteres ist eine wahre Aussage.

Ebenso sind äquivalent:

- $f(x,y) \geq -\dfrac{1}{2}$

- $\frac{xy}{x^2+y^2} \geq -\frac{1}{2}$
- $2xy \geq -(x^2+y^2)$
- $x^2+y^2+2xy \geq 0$
- $(x+y)^2 \geq 0$

Letzteres ist wiederum eine wahre Aussage.

b) Die kritischen Stellen sind die Lösungen des Gleichungssystems

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0\ ,$$

d.h. von

$$\frac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2} = 0\ ,\ \frac{-y^2x+x^3}{(x^2+y^2)^2} = 0\ .$$

Dies ist äquivalent zu:

$$-x^2y+y^3 = 0\ ,\ -y^2x+x^3 = 0$$

und dies zu:

$$y(-x^2+y^2) = 0\ ,\ x(-y^2+x^2) = 0 \qquad (*)$$

Es sei nun (x_0, y_0) eine kritische Stelle, d.h. eine Lösung der Gleichungen.
Dann ist nach der ersten Gleichung in $(*)$ $y_0 = 0$ oder $x_0^2 = y_0^2$.
Wir betrachten zunächst den ersten Fall, also $y_0 = 0$. Einsetzen in die zweite Gleichung führt zu $x_0^3 = 0$, also $x_0 = 0$. Aber $(0,0)$ liegt nicht im Definitionsbereich.
Wir betrachten nun den zweiten Fall, also $x_0^2 = y_0^2$. Dies bedeutet: $x_0 = \pm y_0$. Die Stelle hat nun also die Form (x_0, x_0) oder $(x_0, -x_0)$.
Somit ist jede kritische Stelle von der Form (x_0, x_0) oder $(x_0, -x_0)$ mit $x_0 \neq 0$.

Andererseits sind alle Stellen der Form (x_0, x_0) oder der Form $(x_0, -x_0)$ Lösungen von $(*)$, also kritische Stellen.

Achtung. Der letzte Schritt wird gerne vergessen, ist aber wichtig: Zunächst werden nur notwendige Bedingungen abgeleitet. Dann muss man noch überprüfen, ob alle gefundenen "potentiellen Lösungen" wirklich Lösungen sind. Man kann dies vermeiden, indem man immer strikt Äquivalenzumformungen macht. Das ist oftmals aber recht schwierig.

c) Es ist (für $x_0 \neq 0$) $f(x_0, x_0) = \frac{1}{2}\ ,\ f(x_0, -x_0) = -\frac{1}{2}$.

d) Nach a) und c) sind die Stellen (x_0, x_0) globale Maximalstellen und die Stellen $(x_0, -x_0)$ globale Minimalstellen. Dies sind dann auch lokale Maximal- beziehungsweise Minimalstellen.
Jede lokale Maximal- und Minimalstelle ist eine kritische Stelle. Also kommen nur die Stellen (x_0, x_0) und $(x_0, -x_0)$ in Frage.
Somit gibt es keine weiteren lokalen Maximal- und Minimalstellen und damit auch keine globalen.
Konklusion: Genau die Stellen der Form (x_0, x_0) sind globale Maximalstellen und genau die Stellen der Form $(x_0, -x_0)$ sind globale Minimalstellen. Genau diese Stellen sind auch die lokalen Maximal- beziehungsweise Minimalstellen.