Privatdozent Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/wiwi

MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER II
MUSTERLÖSUNG ZU ÜBUNGSBLATT NR. 2

Aufgabe 1

- $\|P-Q\| = \sqrt{(1-3)^2+(0-(-1))^2+(-1-2)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$
- $\|P-R\| = \sqrt{(1-0)^2+(0-4)^2+(-1-(-3))^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$
- $\|P-S\| = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$
- $\|Q-R\| = \sqrt{9+25+25} = \sqrt{59}$
- $\|Q-S\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$
- $\|R-S\| = \sqrt{4+49+36} = \sqrt{89}$

Aufgabe 2

a) Mit $r := -\lambda$ haben wir

$$\frac{\mathrm{d}m(t)}{dt} = r\,m(t)\ .$$

Dies bedeutet genau, dass exponentielles Wachstum mit stetiger Wachstumsrate $r = -\lambda$ vorliegt. Aufgrund des physikalischen Hintergrunds ist λ positiv, also r negativ.

Erläuterung. Da die Wachstumsrate negativ ist, ist $m(t)$ streng monoton fallend. Es liegt also intuitiv kein Wachstum vor. Man kann auch von einem negativen Wachstum sprechen. Dieser Begriff kommt auch oftmals in wirtschaftlichen Zusammenhängen vor.

b) Wir gehen vor wie in der Vorlesung beschrieben. Da

$$\frac{\mathrm{d}\ln(m(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m(t)}\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda$$

erhalten wir

$$\ln(m(t)) = -\lambda t + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Also gilt folglich

$$m(t) = e^{-\lambda t + c} = m(0)e^{-\lambda t}$$

wobei $m(0) = e^c$. Wir sehen nochmal, dass die stetige Wachstumsrate gegeben durch $-\lambda$ gegeben ist.

c) Die Ableitung $\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}$ beschreibt die momentane Änderung der Funktion $m(t)$, das heißt der Masse des Radionuklids, zum Zeitpunkt t. Für einen kleinen Zeitraum Δt ist $\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}\Delta t$ approximativ gleich der Änderung der Masse im Laufe des Zeitraums Δt.

Explizit

$$\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda m(0)e^{-\lambda t}.$$

d) Zum Zeitpunkt 0 ist die Masse des Radionuklids gegeben durch $m(0)$. Nach der Zeit $t_{1/2}$ soll nur noch die Hälfte dieser Masse, also $\frac{m(0)}{2}$ übrig sein. Wir setzen also an

$$m(t_{1/2}) = \frac{m(0)}{2} \leftrightarrow m(0)e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{m(0)}{2} \leftrightarrow e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \leftrightarrow -\lambda t_{1/2} = \ln(\frac{1}{2}).$$

Also ergibt sich

$$t_{1/2} = -\frac{\ln(\frac{1}{2})}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{\lambda} .$$

Aufgabe 3

Die Äquivalenz von Aussage a) und b) wurde bereits in der Vorlesung gezeigt. Wir werden jetzt noch die Äquivalenz von Aussage b) und c) zeigen.
b) → c) Es gelte b). Somit gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$|x^{(n)} - x| \leq \varepsilon \wedge |y^{(n)} - y| \leq \varepsilon$$

für fast alle n.
Sei nun ein $\hat{\varepsilon} > 0$ gegeben. Dann gilt die obige Aussage insbesondere für $\varepsilon = \frac{\hat{\varepsilon}}{\sqrt{2}}$. Somit erhalten wir für fast alle n:

$$\begin{aligned}\left\|(x^{(n)}, y^{(n)}) - (x, y)\right\| &= \sqrt{(x^{(n)} - x)^2 + (y^{(n)} - y)^2} \\ &= \sqrt{|x^{(n)} - x|^2 + |y^{(n)} - y|^2} \\ &\leq \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \hat{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Dies ist genau Aussage c).
c) → b) Es gelte c). Nun gilt jedes $\varepsilon > 0$

$$\left\|(x^{(n)}, y^{(n)}) - (x, y)\right\| \leq \varepsilon$$

für fast alle n.
Sei nun ein $\hat{\varepsilon} > 0$ gegeben. Dann gilt die obige Aussage insbesondere für dieses $\hat{\varepsilon}$. Somit erhalten wir für fast alle n:

$$\begin{array}{lll} \left\|(x^{(n)}, y^{(n)}) - (x, y)\right\| \leq \hat{\varepsilon}\ , & \text{d.h.} & \sqrt{(x^{(n)} - x)^2 + (y^{(n)} - y)^2} \leq \hat{\varepsilon}\ , \\ & \text{d.h.} & \sqrt{|x^{(n)} - x|^2 + |y^{(n)} - y|^2} \leq \hat{\varepsilon}\ , \\ & \text{d.h.} & |x^{(n)} - x|^2 + |y^{(n)} - y|^2 \leq \hat{\varepsilon}^2\ , \\ & \text{also insbesondere} & |x^{(n)} - x|^2 \leq \hat{\varepsilon}^2 \wedge |y^{(n)} - y|^2 \leq \hat{\varepsilon}^2\ , \\ & \text{d.h.} & |x^{(n)} - x| \leq \hat{\varepsilon} \wedge |y^{(n)} - y| \leq \hat{\varepsilon}. \end{array}$$

Dies ist genau Aussage b).
Die Äquivalenz von a) und c) ergibt sich aus der Äquivalenz von a) und b) sowie dem eben gezeigten $b) \leftrightarrow c)$.

Aufgabe 4

a) Wir betrachten irgendwelche Zahlen $a, b \in I$ mit $a < b$.

Da f differenzierbar ist, können wir den Mittelwertsatz auf das Intervall $[a, b]$ anwenden. Wir erhalten: Es gibt eine $c \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0.$$

Also muss $f(b) = f(a)$ gelten.

Zusammengefasst: Für je zwei Zahlen $a, b \in I$ mit $a < b$ gilt $f(a) = f(b)$.

Wir fixieren nun ein $d \in I$ und setzen $c := f(d)$. Wir haben nun für alle $x < d$: $f(x) = f(d) = c$ und auch für alle $x > d$: $f(x) = f(d) = c$. Somit ist also $f(x)$ konstant gleich c.

b) Wir betrachten die Funktion $f := g - h$. Dann gilt

$$f' = (g - h)' = g' - h' = 0$$

nach Voraussetzung.

Also existiert nach a) eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für alle $x \in I$. Somit erhalten wir

$$c = f(x) = (g - h)(x) = g(x) - h(x)$$

und damit

$$g(x) = h(x) + c.$$

Bemerkung. Wenn eine Funktion f auf einem Intervall gegeben ist, heißt eine Funktion g mit $g' = f$ eine *Stammfunktion* von f. Die Aussage in b) besagt also, dass sich zwei Stammfunktionen zu derselben Funkion nur um eine additive Konstante unterscheiden.