Privatdozent Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/wiwi

MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER II
MUSTERLÖSUNG ZU ÜBUNGSBLATT NR. 1

Aufgabe 4

a) Eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ ist durch die folgenden Daten eindeutig bestimmt:
- ihre Steigung
- ein Punkt, der auf der Geraden liegt.

Die Tangente durch $(x_0, f(x_0))$ läuft durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ und hat die Steigung $f'(x_0)$. Der Graph der linearen Approximation

$$x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ist durch die Gleichung

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

gegeben. Dies ist auch eine Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ mit Steigung $f'(x_0)$.
Damit ist die Tangente gleich dieser Geraden, d.h. gleich dem Graphen der linearen Approximation.

b) Es ist $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$.
Wir haben die folgenden linearen Approximationen:
An $x_0 = 0$: $f(0) = 1, f'(0) = 0$, lineare Approximation:

$$x \mapsto 1$$

An $x_0 = 1$: $f(1) = e, f'(1) = 2e$, lineare Approximation:

$$x \mapsto 2e \cdot (x - 1) + e = 2ex - e$$

An $x_0 = 2$: $f(2) = e^4, f'(2) = 4e^4$, lineare Approximation:

$$x \mapsto 4e^4 \cdot (x - 2) + e^4 = 4e^4x - 7e^4$$

An $x_0 = 3$: $f(3) = e^9, f'(3) = 6e^9$, lineare Approximation:

$$x \mapsto 6e^9 \cdot (x - 3) + e^9 = 6e^9x - 17e^4$$

An $x_0 = 4$: $f(4) = e^{16}, f'(4) = 8e^{16}$, lineare Approximation:

$$x \mapsto 8e^{16} \cdot (x - 4) + e^{16} = 8e^{16}x - 31e^{16}$$