Privatdozent Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/wiwi

MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER
MUSTERLÖSUNG 3. TEST

Es folgt eine Musterlösung zusammen mit Anleitungen für die Aufgaben und Kommentaren. Die Anleitungen und Kommentare sind kursiv gesetzt.

Aufgabe 1 *Es ist bei dieser Aufgabe sehr wichtig, dass man rechtzeitig rundet. Es sollte dabei beachtet werden, dass die möglichen Lösungen (also z.B.* $0\%, 10\%, \ldots$*, aber auch* $-10\%, \ldots$*) so weit auseinanderliegen, dass man davon ausgehen kann, dass man beim Runden kaum einen Fehler machen kann - außer natürlich, man macht wirklich einen Fehler.*

a) Der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor ist

$$\sqrt[2]{\frac{5436}{1342}} \approx \sqrt[2]{4,0} = 2,0 \ .$$

Somit ist die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate $\approx 2 - 1,0 = 1 = 100\%$.

b) Der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor ist

$$\sqrt[2]{\frac{5410}{5436}} \approx \sqrt{1,0} = 1,0 \ .$$

Somit ist die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate $\approx 1 - 1,0 = 0 = 0\%$.

c) Der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor ist

$$\sqrt[4]{\frac{5410}{1342}} \approx \sqrt[4]{4,0} = \sqrt[2]{2,0} \approx 1,4 \ .$$

Somit ist die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate $\approx 1 - 1,4 = 0,4 = 40\%$.

Aufgabe 2 Rechnung im 7-er System:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
- & & 1 & 3 & 1 & 3 \\
- & & 2 & 6 & 1 & 5 \\
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & \\
\hline
 & & 2 & 4 & 3 & 6 \\
\hline\hline
\end{array}$$

Die Lösung ist also: $(2426)_7$

Die Rechnung ist also "ganz normal". Natürlich kann man alternativ auch zuerst die beiden Subtrahenden addieren und dann das Ergebnis vom Minuenden subtrahieren. In der Rechnung kann man den Index 7 weglassen, bei der Angabe der Lösung nicht.

Aufgabe 3 *Bei einer rekursiv definieren Folge "hangeld man sich" schon bei der Definition "von einem Folgenglied zum nächsten". Es ist somit naheliegend, die Methode der vollständigen Induktion zu benutzen.*

a)

Induktionsanfang: $n = 1$

Es ist $a_1 = 2 = \frac{1+1}{1}$.

Induktionsschritt: $n \curvearrowright n + 1$

Es gelte $a_n = \frac{n+1}{n}$ (IV). *(IV steht für Induktionsvoraussetzung.)*

zu zeigen: $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$.

dazu: Es ist

$$a_{n+1} \overset{\text{Def}}{=} 2 - \frac{1}{a_n} \overset{\text{(IV)}}{=} 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2(n+1) - n}{n+1} = \frac{2n + 2 - n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \,.$$

b) Es gilt: $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1 + 0 = 1$ für $n \longrightarrow \infty$.

Also existiert der Grenzwert und ist gleich 1.

Aufgabe 4

a) *Bei dieser Aufgabe ist es nicht nur wichtig, dass ein korrektes δ angegeben wird. Es ist auch entscheidend, dass klar zum Ausdruck kommt, warum es sich um ein korrektes δ handelt. Es kommt besonders auf die durch die mathematischen Symbole zum Ausdruck gebrachte Logik an. Hier ist insbesondere die Bedeutung des Folgepfeils relevant. Ich stelle nun eine Lösung vor, die sich an meinen Lösungen ähnlicher Aufgaben in Vorlesung und Übung orientiert. Danach stelle ich eine weitere Lösung vor.*

Meine Lösung hat zwei Charakteristika: Man schreibt immer von "oben nach unten". Dafür benutzt man allerdings Folgepfeile "von unten nach oben". Bei der alternativen Lösung ist es umgekehrt: Man benutzt Folgepfeile immer "von oben nach unten / von links nach rechts", also "ganz normal". Dafür muss man aber am Ende der Aufgabe oben noch etwa einfügen. Damit haben beide Lösungen einen Vor- und einen Nachteil. Meiner Ansicht nach ist meine Lösung unter Zeitdruck leichter. Die alternative Lösung ist meiner Ansicht nach vorzuziehen, wenn man es "besonders schön" machen will – was allerdings in der Klausur nicht relevant ist.

Meine Lösung

Wir setzen für $x \in \mathbb{R}$: $x' := x - x_0 = x - (-1) = x + 1$, also $x = x' - 1$.

Damit ist

$$f(x) = f(x' - 1) = (x' - 1)^3 - 3(x' - 1) + 1 =$$

$$((x')^3 - 3(x')^2 + 3x' - 1) - 3x' + 3 + 1 = (x')^3 - 3(x')^2 + 3$$

Und:

$$f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3 \,.$$

(Dies ist kein Zufall: $x = -1$ entspricht $x' = 0$. Man muss somit die konstanten Terme in der obigen Rechnung betrachten. Dies ist genau $-1 + 3 - 1 = 3$.)

Also:

$$f(x) - f(-1) = f(x' - 1) - f(-1) = (x')^3 - 3(x')^2$$

(Wenn hier ein konstanter Term vorkommt, hat man sich verrechnet. Man kann dann nicht mehr sinnvoll weitermachen.)

Es sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(-1)| \leq \epsilon \\ \Longleftrightarrow\quad & |(x')^3 - 3(x')^2| \leq \epsilon \\ \Longleftarrow\quad & |x'|^3 + 3|x'|^2 \leq \epsilon \\ \Longleftarrow\quad & |x'|^3 \leq \tfrac{\epsilon}{2} \wedge 3|x'|^2 \leq \tfrac{\epsilon}{2} \\ \Longleftrightarrow\quad & |x'| \leq \sqrt[3]{\tfrac{\epsilon}{2}} \wedge \sqrt[2]{\tfrac{\epsilon}{6}} \end{aligned}$$

(Ich habe merkwürdigerweise oftmals "$|x'|^3 - 3|x'|^2 \leq \epsilon$" anstatt "$|x'|^3 + 3|x'|^2 \leq \epsilon$" gesehen, was falsch ist.)

(Es kommt hier, wie schon geschrieben, nur auf die Rechung "von unten nach oben" an. D.h. alle "$\Longleftrightarrow$" können durch $\Longleftarrow$" ersetzt werden, ohne dass es zu irgendwelchen Problemen kommt. Ich möchte Ihnen auch raten, dies zu tun, da Sie damit eine mögliche Fehlerquelle von vorne herein ausgeschlossen haben.)

Also kann man $\delta := \min\left\{\sqrt[3]{\frac{\epsilon}{2}}, \sqrt{\frac{\epsilon}{6}}\right\}$ wählen.

Es ist wichtig, dass hier nicht einfach so "$\delta := ...$" oder sogar "$\Longrightarrow \delta := ...$" steht. Denn es gibt kein eindeutiges δ. Die Willkür sollte sprachlich deutlich werden.

<u>Die alternative Lösung</u>

Wie schon geschrieben muss man bei dieser Lösung am Ende oben etwa einfügen, nämlich die Definition von δ. Ich stelle das im Zeitablauf dar.

Man schreibt:

Wir setzen für $x \in \mathbb{R}$: $x' := x - x_0 = x + 1$, d.h. $x = x' - 1$.

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig.

Mit

$$(*) \quad \delta :=$$

gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - (-1)| \leq \delta$:

(Bei $(*)$ wird zum Schluss die errechnete Lösung für δ eingefügt. Das Symbol $(*)$ schreibe ich hier nur, um mich am Schluss darauf zu beziehen.)

Es ist $|x'| \leq \delta$ und

$$|f(x) - f(-1)| = \text{(siehe oben)} = |(x')^3 - 3(x')^2| \leq |x'|^3 + 3|x'|^2 \leq \delta^3 + 3\delta^2 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Alle Ungleichungen außer $\delta^3 + 3\delta \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$ sind klar. Jetzt muss man sich überlegen, unter welcher (leicht hinzuschreibenden) Bedingung diese Ungleichung gilt. Hierfür macht man eine Nebenrechnung:

<u>NR.</u>

$$\delta^3 \leq \tfrac{\epsilon}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta \leq \sqrt[3]{\tfrac{\epsilon}{2}}$$

$$3\delta^2 \leq \tfrac{\epsilon}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta \leq \sqrt{\tfrac{\epsilon}{6}}$$

Jetzt fügt man oben bei $(*)$ hinter "$\delta :=$" ein:

$$\min\left\{\sqrt[3]{\frac{\epsilon}{2}}, |x'| \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{6}}\right\}$$

Damit ist Lösung abgeschlossen.

b) Die Funktion f ist stetig an $x = -1$.

Aufgabe 5

a) Es ist

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} x^4 - 2x^2 + 1 = \lim_{x \longrightarrow \infty} x^4 \cdot (1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}) = \infty$$

(Der "Punkt" ist hier, dass $1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}$ *gegen 1 geht und* x^4 *gegen Unendlich. Das muss man nicht unbedingt ausführen. Man kann auch* $\lim_{x \longrightarrow \infty} x^4 \cdot (1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}) = \infty \cdot 1 = \infty$ *hinschreiben. Das sieht komisch aus, ist aber richtig, wenn man es richtig versteht.*
Die allgemeine Regel ist: Wenn $a > 0$ *ist, ist* $a \cdot \infty = \infty$*, wenn* $a < 0$ *ist, ist* $a \cdot \infty = -\infty$*.*
Aber Vorsicht: $0 \cdot \infty$ *ist nicht sinnvoll zu betrachten. Und noch etwas:*
Gelegentlich habe ich auch so etwas wie $\lim_{x \longrightarrow \infty} x^4 - 2x^2 + 1 = \infty - 2\infty = -\infty$ *gesehen. Das ist wirklich total falsch!*

Alternativ kann man auch einfach schreiben:

$\lim_{x \longrightarrow \infty} x^4 - 2x^2 + 1 = \infty$, weil x^4 am schnellsten wächst.

Das ist natürlich ungenau, aber hier ist das auch wirklich klar.
Und dann noch:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} x^4 - 2x^2 + 1 = \lim_{x \longrightarrow -\infty} x^4 \cdot (1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}) = \infty$$

b) *Hier werden erstmal die lokalen Extremstellen bestimmt. Die globalen müssen dann aber auch noch bestimmt werden.*
Es ist

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4\,(x^3 - x)$$
$$f''(x) = 4\,(3x^2 - 1)$$

Bestimmung der Extremstellen:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^3 - x = 0 \Longleftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Longleftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$$

Die Lösungen sind $x = -1, x = 0, x = 1$.
Es ist

$$f''(-1) = 4 \cdot (3 - 1) = 8 > 0$$
$$f''(0) = -4 < 0$$
$$f''(1) = 4 \cdot (3 - 1) = 8 > 0$$

Somit: An $x = -1$ und $x = 1$ liegen lokale Minimalstellen vor, an $x = 0$ liegt eine lokale Maximalstelle vor.
Da $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \infty$, gibt es keine globale Maximalstelle und es gibt eine globale Minimalstelle. *("Es gibt eine" wird in der Mathematik im Sinne von "Es gibt mindestens eine" benutzt.)*

Es ist $f(-1) = 1 - 2 + 1 = 0$, ebenso $f(-1) = 1 - 2 + 1 = 0$.
Somit liegen bei $x = -1$ und $x = 1$ globale Minimalstellen vor.

Es gibt hier übrigens noch eine einfache Möglichkeit, die zweiten Ableitungen zu vermeiden: Es sei allgemein ein Polynom $f(x)$ und ein x_0 mit $f'(x_0) = 0$ gegeben. Die Frage ist erstmal, ob x_0 eine lokale Extremstelle ist. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $f''(x_0) \neq 0$ ist. Und dies ist genau dann der Fall, wenn x_0 eine einfache *Nullstelle von $f'(x)$ ist, d.h. wenn $x - x_0$ das Polynom $f'(x)$ teilt, aber $(x - x_0)^2$ das Polynom $f'(x)$ nicht teilt.*

Außerdem kann man noch die Grenzwerte für $x \longrightarrow -\infty$ und $x \longrightarrow \infty$ benutzen, um zu bestimmen, ob Maximalstellen oder Minimalstellen vorliegen.

Die Lösung kann dann nach Bestimmung der Nullstellen von f' so aussehen:

Es ist
$$f'(x) = 4\,(x+1)\,x\,(x-1)$$
Also sind alle Nullstellen von f' einfach. Folglich liegen bei $x = -1; 0; 1$ lokale Extremstellen vor.
Da $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$ gilt, folgt:
Bei -1 ist eine lokale Minimalstelle, bei 0 ein lokale Maximalstelle und bei 1 eine lokale Minimalstelle.

Danach geht die Lösung wieder weiter wie oben.

c) Nach a) und b) gilt: Auf $(-\infty, -1]$ und auf $[0, 1]$ ist die Funktion monoton fallend.
Auf $[-1, 0]$ und auf $[1, \infty)$ ist die Funktion monoton wachsend.

Wenn wie hier in einer Aufgabe "Geben Sie an" steht, sollte das Ergebnis (auf Grundlage des Bisherigen) sofort einsichtig sein.