§7 Rechnen mit Polynomen

Zu Polynomfunktionen

Satz. Zwei Polynomfunktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_1 x + b_0$$

sind genau dann gleich, wenn $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ ist.

Beachte hier: Die beiden Funktionen f und g sind nach Definition genau dann gleich, wenn für alle Zahlen x gilt: $f(x) = g(x)$.

Zu Polynomfunktionen

Es werden hier zwei “wenn-dann”-Aussagen gemacht.

Die eine ist:

Wenn $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$ ist, dann sind die Funktionen f und g gleich.

Die andere ist:

Wenn die Funktionen f und g gleich sind, dann ist $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$.

Die erste Aussage ist klar, wir betrachten die zweite.

Zu Polynomfunktionen

Es wird behauptet: Wenn die Funktionen f und g gleich sind, dann ist $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

Mit anderen Worten: Es wird behauptet, dass das Folgende *nicht* möglich ist:

Die Funktionen f und g sind gleich, aber trotzdem gibt es ein k mit $a_k \neq b_k$.

Zu Polynomfunktionen

Die folgenden Aussagen haben denselben mathematischen Inhalt und sind nur rhetorisch unterschiedlich:

Die Funktionen f und g sind gleich, *aber trotzdem* gibt es ein k mit $a_k \neq b_k$.

Die Funktionen f und g sind gleich *und* es gibt ein k mit $a_k \neq b_k$.

Es gibt ein k mit $a_k \neq b_k$ *und* die Funktionen f und g sind gleich.

Es gibt ein k mit $a_k \neq b_k$, *aber trotzdem* sind die Funktionen f und g gleich.

Zu Polynomfunktionen

Es wird behauptet: Wenn die Funktionen f und g gleich sind, dann ist $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

Mit anderen Worten: Es wird behauptet, dass das Folgende *nicht* möglich ist:

Die Funktionen f und g sind gleich, aber trotzdem gibt es ein k mit $a_k \neq b_k$.

Das ist genau die gleiche Aussage wie:

Es gibt ein k mit $a_k \neq b_k$, aber trotzdem sind die Funktionen f und g gleich.

Das kann man auch so sagen: Wenn es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt, dann sind die Funktionen f und g ungleich.

Zu Polynomfunktionen

Behauptung. Wenn die Funktionen f und g gleich sind, dann ist $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

Umformulierung. Wenn es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt, dann sind die Funktionen f und g ungleich.

Das heißt: Wenn es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt, dann gibt es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$.

Dies zeigen wir jetzt.

Zu Polynomfunktionen

Wir wollen zeigen:

Wenn es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt, dann gibt es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$.

Zu Polynomfunktionen

Wir setzen voraus, dass es ein k mit $a_k \neq b_k$ gibt. Wir nehmen das größte k mit dieser Eigenschaft und wir setzen OE voraus, dass $a_k > b_k$ ist.

Wir wollen zeigen, dass es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$ gibt.

Wir betrachten nun die Funktion

$$
\begin{aligned}
f - g: \quad x \mapsto \qquad & f(x) - g(x) \\
= \quad & (a_n x^n + \cdots + a_0) - (b_n x^n + \cdots + b_0) \\
= \quad & (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 - b_0) \\
= \quad & (a_k - b_k)x^k + (a_{k-1} - b_{k-1})x^{k-1} + \cdots + (a_0 - b_0)
\end{aligned}
$$

mit $a_k - b_k \neq 0$.

Wir wissen schon: Für große x ist $f(x) - g(x) \geq \frac{1}{2}(a_k - b_k)x^k$.
Also gibt es eine Zahl x mit $f(x) \neq g(x)$.

Das war zu zeigen!

Zu Polynomfunktionen

Wir haben bewiesen:

Satz. Zwei Polynomfunktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; x \mapsto b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_1 x + b_0$$

sind genau dann gleich, wenn $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ ist.

Bemerkung. Ohne diesen Satz könnte man eigentlich gar nicht vom *Grad* einer Polynomfunktion sprechen.

Zu Polynomfunktionen

Polynomfunktionen haben also die folgenden Eigenschaften:

1. Man kann sie in der Form
$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
schreiben, wobei $a_0, \ldots, a_n$ Zahlen sind.
2. Zwei Polynomfunktionen
$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
und
$$x \mapsto b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$
sind genau dann gleich, wenn $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ ist.

Die Idee der Polynome

Statt ausführlich eine Polynomfunktion wie z.B

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \, , \; x \mapsto f(x) := x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

hinzuschreiben, schreiben wir nun einfach

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \; .$$

Wir betrachten hier x als *Unbestimmte*, mit der man "ganz normal" rechnen kann. Wir vergessen, dass wir Funktionen betrachten und betonen, dass wir "mit der Unbestimmten x" rechnen können.

Wenn wir uns auf diesen Standpunkt stellen, sprechen wir von *Polynomen*.

Die Idee der Polynome

Polynome haben also die folgenden Eigenschaften:

1. Man kann sie in der Form
$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$
schreiben, wobei $a_0, \ldots, a_n$ Zahlen sind.
2. Zwei Polynome
$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$
und
$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$$
sind genau dann gleich, wenn $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ ist.
3. Man kann sie "ganz normal" addieren, subtrahieren und multiplizieren, wenn man x als "Unbestimmte" auffasst.

Die Idee der Polynome

Wir können also z.B. das Polynom

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

betrachten, oder das Polynom

$$\frac{92}{15} \cdot x^{10034} + \frac{345}{732} x^{23} + \pi \ ,$$

oder für eine feste Zahl a das Polynom

$$x^{234} + ax + 1 \ ,$$

oder einfach für eine nicht-negative ganze Zahl n das *Monom*

$$x^n \ ,$$

d.h. $x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^2, \ldots$.

Die Idee der Polynome

Wir betrachten

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5\ .$$

In diesem Beispiel sagen wir: $f(x)$ ist

- ein Polynom *dritten Grades*
- mit den *Termen* $5\ ,\ -3x\ ,\ 2x^2\ ,\ x^3$
- und den *Koffizienten* $5\,;\ -3\,;\ 2\,;\ 1$.
- Hier ist x^3 der *führende Term*
- und 5 der *konstante Term*.

Da der führende Koeffizient gleich 1 ist, ist das Polynom *normiert*.

Die Idee der Polynome

Der *Grad* eines Polynoms

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ und $a_n \neq 0$ ist definiert als n.

Ein *konstantes Polynom* ist ein Polynom der Form

$$f(x) = a$$

mit einer Zahl a.

Wenn nun $a \neq 0$ ist, ist der Grad gleich 0.

Wenn $a = 0$ ist, erhalten wir das *Nullpolynom*, auch *triviales Polynom* genannt.

Wir definieren: Der Grad des Nullpolynoms sei -1.

Die Idee der Polynome

Polynome kann man

- addieren,
- subtrahieren,
- multiplizieren,

wobei die üblichen Rechenregeln gelten.

Z.B. ist das Polynom $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ selbst eine Summe seiner Terme

$$x^3, \, 2x^2, \, -3x, \, 5 \, ,$$

der Term $2x^2$ ist das Produkt von 2 und dem Monom x^2 , und x^2 selbst ist ein Produkt von x und x.

Rechnen mit Polynomen

Beispiele.

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 5x + 1) = x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2+x+4)\cdot(x-2) = x^3+x^2+4x-2x^2-2x-8 = x^3-x^2+2x-8$$

Wenn man die Unbestimmte x durch irgendeine Zahl ersetzt, bleiben die Rechnungen immer noch richtig.

Einsetzen

Man kann x sogar durch ein anderes Polynom ersetzen und die Rechnungen bleiben richtig.

Beispiel.

$$(x-1)\cdot(x+1)=x^2-1$$

Wir ersetzen x durch $x-2$:

$$((x-2)-1)((x-2)+1)=(x-2)^2-1$$

D.h.

$$(x-3)\cdot(x-1)=x^2-4x+3$$

Einsetzen

Es sei $f(x)$ ein Polynom und a eine Zahl.

Wir können nun a "für x einsetzen". Wir erhalten den Wert der Polynomfunktion $x \mapsto f(x)$ an der Stelle $x = a$.

Mit anderen Worten: Wir erhalten $f(a)$.

Man sagt nun:

"Für $x = a$ ist der Wert des Polynoms $f(x)$ gleich $f(a)$."

Einsetzen

Beispiel. Wir sagen:

“Für $x = 2$ ist der Wert des Polynoms $f(x) = x^2 - 1$ gleich 3.”

Aber: Das Polynom (!) x ist nicht gleich dem Polynom 2!

Also haben wir $x \neq 2$, wenn wir von Polynomen reden.

Wir sehen: “Für $x = 2$” ist eine Redensart, die im Widerspruch zur Idee der Polynome steht.

Besser wäre: “Wenn man für x die Zahl 2 einsetzt, erhält man ...”

Einsetzen

Wenn $g(x)$ ein weiteres Polynom ist, erhalten wir durch Ersetzen das Polynom $f(g(x))$.

Z.B.

$$f(x) = x^2 - 1\ ,\ g(x) = x - 2$$

Wir erhalten:

$$f(g(x)) = x^2 - 2x + 3$$

Dieses Polynom $f(g(x))$ entspricht der Polynomfunktion, die durch Hintereinanderausführung von $g(x)$ und $f(x)$ gegeben ist, d.h.

$$x \mapsto f(g(x))$$

Vergleich mit ganzen Zahlen

Es gibt viele Gemeinsamheiten zwischen Polynomen und ganzen Zahlen:

- Beide kann man addieren, subtrahieren und multiplizieren.
- Dabei gelten die üblichen Rechenregeln (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität).

Es gibt noch eine weitere Gemeinsamkeit:

- Für ganze Zahlen gibt es *Teilen mit Rest* …
  und ebenso für Polynome …

Teilen mit Rest

Unter ganzen Zahlen haben wir *Teilen mit Rest*:

$$132 : 11 = 12 \qquad 132 = 11 \cdot 12$$

$$133 : 11 = 12 + \frac{1}{11} \qquad 133 = 11 \cdot 12 + 1$$

Hier ist 1 der Rest bei der Divison von 133 durch 11. Um von *Teilen mit Rest* zu sprechen, brauchen wir nur ganze Zahlen, rationale Zahlen brauchen wir nicht.

Polynomdivision ist Teilen mit Rest angewandt auf Polynome.

Polynomdivision

$$
\begin{array}{rl}
 & 3\ 2\ 1\ 1 : 12 = 267 + \frac{7}{12} \\
- & \underline{2\ 4} \\
 & \ 8\ 1 \\
- & \ \underline{7\ 2} \\
 & \ 9\ 1 \\
- & \ \underline{8\ 4} \\
 & \ 7
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 3\ 2\ 1\ 1 = 12 \cdot\ (\ 2H + 6Z + 7E) + 7\ 267 + 7 \\
- & \underline{2\ 4\ 0\ 0} \\
 & \ 8\ 1\ 1 \\
- & \ \underline{7\ 2\ 0} \\
 & \ 9\ 1 \\
- & \ \underline{8\ 4} \\
 & \ 7
\end{array}
$$

Polynomdivision

$$
\begin{array}{rl}
3x^5+4x^4-6x^3+2x^2-4x+1 & = (x^2+2x-1)\cdot(3x^3-2x^2+x-2)+(x-1) \\
-(\underline{3x^5+6x^4-3x^3}) & \\
-2x^4-3x^3+2x^2-4x+1 & \\
-(\underline{-2x^4-4x^3+2x^2}) & \\
x^3+0x^2-4x+1 & \\
-(\underline{x^3+2x^2-\ \ x}) & \\
-2x^2-3x+1 & \\
-(\underline{-2x^2-4x+2}) & \\
x-1 &
\end{array}
$$

Theorie zur Polynomdivision

Teilen mit Rest mit ganzen Zahlen.

Satz. Es seien a und b ganze Zahlen, $b \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen c und r mit

$$a = c \cdot b + r$$

mit $0 \leq r < |b|$. Die Zahl r heißt der *Rest* bei der Division von a durch b.

Definition. Wenn der Rest r gleich 0 ist, sagen wir, dass a durch b *teilbar* ist. Dann ist also

$$a = c \cdot b \ .$$

Theorie zur Polynomdivision

Satz. Es seien nun Polynome $f(x), g(x)$ gegeben mit $g(x) \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $h(x), r(x)$ mit

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$$

und $\mathrm{Grad}(r(x)) < \mathrm{Grad}(g(x))$. Das Polynom $r(x)$ heißt der *Rest* bei der Division von $f(x)$ durch $g(x)$.

Definition. Wenn der Rest $g(x)$ gleich 0 ist, sagen wir, dass $f(x)$ durch $g(x)$ *teilbar* ist. Dann ist also

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \; .$$

Nullstellen

Es sei nun $f(x)$ ein Polynom und a eine Zahl. Wenn $f(a) = 0$ ist, sagen wir, dass $f(x)$ an der Stelle a eine Nullstelle hat. Dies bedeutet genau, dass $x = a$ eine Lösung der Gleichung

$$f(x) = 0$$

ist.

Nullstellen

Behauptung. $f(x)$ hat genau dann an $x = a$ eine Nullstelle, wenn $f(x)$ durch $x - a$ teilbar ist.

Beweis. Wir teilen $f(x)$ durch $x - a$ mit Rest.

Wir erhalten

$$f(x) = g(x) \cdot (x - a) + c \ ,$$

wobei c eine Zahl ist.

Es ist

$$f(a) = g(a) \cdot 0 + c = c \ .$$

Somit sind äquivalent:

- $f(a) = 0$.
- $c = 0$.
- $f(x) = g(x) \cdot (x - a)$.
- $f(x)$ ist durch $x - a$ teilbar.

Mehrfache Nullstellen

Es habe nun das nicht-triviale Polynom $f(x)$ an $x = a$ eine Nullstelle. Dann ist also

$$f(x) = f_1(x) \cdot (x - a)$$

mit einem Polynom $f_1(x)$.

Wir können uns fragen, ob $f_1(x)$ wieder eine Nullstelle an $x = a$ hat.

Wenn dies der Fall ist, haben wir

$$f_1(x) = f_2(x) \cdot (x - a)$$

mit einem Polynom $f_2(x)$.

Dann ist

$$f(x) = f_2(x) \cdot (x - a)^2 \ .$$

Mehrfache Nullstellen

Wir führen das Teilen fort, solange es geht.

Wir erhalten eine Darstellung der Form

$$f(x) = f_k(x) \cdot (x - a)^k$$

mit $f_k(a) \neq 0$.

Hier gilt: Das Polynom $(x - a)^k$ teilt das Polynom $f(x)$, aber das Polynom $(x - a)^{k+1}$ teilt das Polynom nicht.

Definition. Die Zahl k heißt die *Ordnung* oder *Vielfachheit* der Nullstelle a des Polynoms $f(x)$.

Mehrfache Nullstellen

Man kann direkt ablesen, ob 0 eine Nullstelle eines Polynoms ist, und man kann direkt die Ordnung ablesen.

Beispiel. Das Polynom

$$2x^{10} + x^7 + x^5 + 1$$

hat keine Nullstelle an $x = 0$.

Das Polynom

$$2x^{10} + x^7 - x^5 = (2x^5 + x^2 - 1)x^5 = (2x^5 + x^2 - 1)(x - 0)^5$$

hat eine fünffache Nullstelle an $x = 0$.

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

Wir geben uns zwei Polynome $f(x), g(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten vor (d.h. mit Koeffizienten, die ganze Zahlen sind). Wir setzen auch voraus, dass $g(x)$ normiert ist, d.h.

$$g(x) = x^n + \cdots$$

Wir führen Teilen mit Rest durch:

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$$

Wenn man die Polynomdivision betrachtet, sieht man:

Die Polynome $h(x)$ und $r(x)$ haben auch ganzzahlige Koeffizienten.

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

$$
\begin{array}{r}
3x^5+4x^4-6x^3+2x^2-4x+1 = (x^2+2x-1)\cdot(3x^3-2x^2+x-2)+(x-1) \\
-(\underline{3x^5+6x^4-3x^3}) \\
-2x^4-3x^3+2x^2-4x+1 \\
-(\underline{-2x^4-4x^3+2x^2}) \\
x^3+0x^2-4x+1 \\
-(\underline{x^3+2x^2-\ \ x}) \\
-2x^2-3x+1 \\
-(\underline{-2x^2-4x+2}) \\
x-1
\end{array}
$$

Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten

Satz. Wir geben uns zwei Polynome $f(x)$, $g(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten vor, wobei $g(x)$ normiert ist, d.h.

$$g(x) = x^n + \cdots$$

Dann haben die eindeutig bestimmten Polynome $h(x)$ und $r(x)$ mit

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$$

und $\mathrm{Grad}(r(x)) < \mathrm{Grad}(g(x))$ auch ganzzahlige Koeffizienten.

Wenn nun $f(x)$ durch $g(x)$ teilbar ist, ist

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) \; ,$$

wobei $h(x)$ ganzzahlige Koeffizienten hat.

Anwendungen

Wir geben uns ein normiertes quadratisches Polynom

$$f(x) = x^2 + px + q$$

mit einer Nullstelle x_1 vor. Wir können durch $x - x_1$ teilen und erhalten

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

mit irgendeiner Zahl x_2.

Dann ist

$$x^2 + px + q = x^2 + (-x_1 - x_2) \cdot x + x_1 x_2$$

und somit

$$x_1 x_2 = q = f(0) \quad , \quad x_1 + x_2 = -p \; .$$

Dies ist die Regel von Vieta.

Ferner gilt: Wenn p, q und x_1 ganze Zahlen sind, dann ist auch x_2 eine ganze Zahl und beide sind Teiler von q.

Anwendungen

Satz. Wir geben uns irgendein nicht-triviales Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ mit $a_0 \neq 0$ vor.

Dann sind alle ganzzahligen Nullstellen von $f(x)$ Teiler des konstanten Terms von $f(x)$, d.h. von $a_0 = f(0)$.

Begründung.

Es sei x_0 eine ganzzahlige Nullstelle von f.

Wir haben

$$f(x) = (b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) \cdot (x - x_0)$$

mit einem Polynom $b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Hiermit ist

$$a_0 = -x_0 b_0 \ .$$

Das Horner-Schema

Wir wollen ein Polynom mit möglichst wenig Rechnung an einem Wert auswerten. Hierbei hilft das *Horner-Schema*.

Beispiel. Wir wollen das Polynom

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$$

an irgendeiner Stelle $x = a$ auswerten.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot (3x^2 - 2x + 5) + 7 \\ &= x \cdot (x \cdot (x \cdot 3 - 2) + 5) + 7 \end{aligned}$$

Z.B. für $x = -2$:

$$\begin{aligned} (-2) \cdot 3 - 2 &= -8 \\ (-2) \cdot (-8) + 5 &= 21 \\ (-2) \cdot 21 + 7 &= -35 \end{aligned}$$

Also: $f(-2) = -35$

Das Horner-Schema

$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$ an $x = -2$:

Symbolisch:

	x^3	x^2	x	1
	3	-2	5	7
x= -2	0	-6	16	-42
	3	-8	21	-35

Hier kann man sogar noch mehr ablesen:

$$(3x^3 - 2x^2 + 5x + 7) = (x + 2) \cdot (3x^2 - 8x + 21) - 35$$