§6 Polynomielle Gleichungen und Polynomfunktionen

Lineare Gleichungen

Eine *lineare Gleichung* in einer Variablen ist eine Gleichung der Form

$$ax + b = cx + d$$

mit festen Zahlen a und c mit $a \neq c$.

Lineare Gleichungen

Eine *lineare Gleichung* in einer Variablen ist eine Gleichung der Form

$$ax + b = cx + d$$

mit festen Zahlen a und c mit $a \neq c$.

Dies kann man so umformen:

$$(a - c)x = d - b$$

Lineare Gleichungen

Eine *lineare Gleichung* in einer Variablen ist eine Gleichung der Form

$$ax + b = cx + d$$

mit festen Zahlen a und c mit $a \neq c$.

Dies kann man so umformen:

$$(a - c)x = d - b$$

So eine Gleichung hat genau eine Lösung:

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Lineare Gleichungen

Eine *lineare Gleichung* in einer Variablen ist eine Gleichung der Form

$$ax + b = cx + d$$

mit festen Zahlen a und c mit $a \neq c$.

Dies kann man so umformen:

$$(a - c)x = d - b$$

So eine Gleichung hat genau eine Lösung:

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{d - b}{a - c}\right\} .$$

Polynomielle Gleichungen

Polynomielle Gleichungen können die Unbestimmte x in höheren Potenzen enthalten.

Polynomielle Gleichungen

Polynomielle Gleichungen können die Unbestimmte x in höheren Potenzen enthalten.

Beispiele für solche Gleichungen sind:

Polynomielle Gleichungen

Polynomielle Gleichungen können die Unbestimmte x in höheren Potenzen enthalten.

Beispiele für solche Gleichungen sind:

$$7x^2 + 5x + 1 = 0$$

Polynomielle Gleichungen

Polynomielle Gleichungen können die Unbestimmte x in höheren Potenzen enthalten.

Beispiele für solche Gleichungen sind:

$$
\begin{aligned}
7x^2 + 5x + 1 &= 0 \\
x^3 - 4x^2 - 2x + 6 &= 0
\end{aligned}
$$

Polynomielle Gleichungen

Polynomielle Gleichungen können die Unbestimmte x in höheren Potenzen enthalten.

Beispiele für solche Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} 7x^2 + 5x + 1 &= 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 6 &= 0 \\ x^3 - 4x^2 &= 2x - 6 \end{aligned}$$

Polynomielle Gleichungen

Polynomielle Gleichungen können die Unbestimmte x in höheren Potenzen enthalten.

Beispiele für solche Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} 7x^2 + 5x + 1 &= 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 6 &= 0 \\ x^3 - 4x^2 &= 2x - 6 \\ x^7 &= 324 \end{aligned}$$

Polynomielle Gleichungen

Polynomielle Gleichungen können die Unbestimmte x in höheren Potenzen enthalten.

Beispiele für solche Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} 7x^2 + 5x + 1 &= 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 6 &= 0 \\ x^3 - 4x^2 &= 2x - 6 \\ x^7 &= 324 \\ 3x &= 5 \end{aligned}$$

Wenn wir eine Gleichung der Form "$\cdots = 0$" haben, sagen wir:

"Die rechte Seite ist trivial".

Polynomielle Gleichungen

Polynomielle Gleichungen können die Unbestimmte x in höheren Potenzen enthalten.

Beispiele für solche Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} 7x^2 + 5x + 1 &= 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 6 &= 0 \\ x^3 - 4x^2 &= 2x - 6 \\ x^7 &= 324 \\ 3x &= 5 \end{aligned}$$

Wenn wir eine Gleichung der Form "$\cdots = 0$" haben, sagen wir:

"Die rechte Seite ist trivial".

Wir betrachten nun nur solche Gleichungen.

Quadratische Gleichungen

Die nächst einfachen Gleichungen nach linearen Gleichungen sind quadratische Gleichungen.

Quadratische Gleichungen

Die nächst einfachen Gleichungen nach linearen Gleichungen sind quadratische Gleichungen.

Eine *quadratische Gleichung* mit trivialer rechter Seite ist eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \ ,$$

wobei a, b, c feste Zahlen (Konstanten) sind und $a \neq 0$ ist.

Quadratische Gleichungen

Die nächst einfachen Gleichungen nach linearen Gleichungen sind quadratische Gleichungen.

Eine *quadratische Gleichung* mit trivialer rechter Seite ist eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \ ,$$

wobei a, b, c feste Zahlen (Konstanten) sind und $a \neq 0$ ist.

Man kann durch a teilen, ohne die Lösungsmenge zu ändern.

Quadratische Gleichungen

Die nächst einfachen Gleichungen nach linearen Gleichungen sind quadratische Gleichungen.

Eine *quadratische Gleichung* mit trivialer rechter Seite ist eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \; ,$$

wobei a, b, c feste Zahlen (Konstanten) sind und $a \neq 0$ ist.

Man kann durch a teilen, ohne die Lösungsmenge zu ändern.

Dann erhält man eine Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

mit festen Zahlen p, q.

Quadratische Gleichungen

Lösung der Gleichung mit *quadratischer Ergänzung*:

Quadratische Gleichungen

Lösung der Gleichung mit *quadratischer Ergänzung*:
Wir betrachten als Beispiel

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

und formen äquivalent um.

Quadratische Gleichungen

Lösung der Gleichung mit *quadratischer Ergänzung*:
Wir betrachten als Beispiel

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

und formen äquivalent um. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & x^2 + 7x + 12 &=& \quad 0 \\ \iff \quad & x^2 + 7x &=& \quad -12 \end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen

Lösung der Gleichung mit *quadratischer Ergänzung*:
Wir betrachten als Beispiel

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

und formen äquivalent um. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 12 &= 0 \\ \iff \quad x^2 + 7x &= -12 \\ \iff \quad x^2 + 7x + \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 &= \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 - 12 \end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen

Lösung der Gleichung mit *quadratischer Ergänzung*:
Wir betrachten als Beispiel

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

und formen äquivalent um. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & x^2 + 7x + 12 &=& \quad 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 + 7x &=& \quad -12 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 + 7x + \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 &=& \quad \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 - 12 \\ \Longleftrightarrow \quad & (x + \tfrac{7}{2})^2 &=& \quad \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 - 12 \end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen

Lösung der Gleichung mit *quadratischer Ergänzung*:
Wir betrachten als Beispiel

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

und formen äquivalent um. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & x^2 + 7x + 12 &=& \quad 0 \\ \iff & x^2 + 7x &=& \quad -12 \\ \iff & x^2 + 7x + \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 &=& \quad \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 - 12 \\ \iff & (x + \tfrac{7}{2})^2 &=& \quad \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 - 12 \\ \iff & x + \tfrac{7}{2} &=& \quad \sqrt{\left(\tfrac{7}{2}\right)^2 - 12} \qquad \text{oder} \\ & x + \tfrac{7}{2} &=& \quad -\sqrt{\left(\tfrac{7}{2}\right)^2 - 12} \end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen

Lösung der Gleichung mit *quadratischer Ergänzung*:
Wir betrachten als Beispiel

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

und formen äquivalent um. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 7x + 12 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow \quad x^2 + 7x & = & -12 \\ \Longleftrightarrow \quad x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12 \\ \Longleftrightarrow \quad (x + \frac{7}{2})^2 & = & \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12 \\ \Longleftrightarrow \quad x + \frac{7}{2} & = & \pm\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} \end{array}$$

Quadratische Gleichungen

Lösung der Gleichung mit *quadratischer Ergänzung*:
Wir betrachten als Beispiel

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

und formen äquivalent um. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rccc} & x^2 + 7x + 12 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & x^2 + 7x & = & -12 \\ \Longleftrightarrow & x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12 \\ \Longleftrightarrow & (x + \frac{7}{2})^2 & = & \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12 \\ \Longleftrightarrow & x & = & -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} \end{array}$$

Quadratische Gleichungen

Lösung der Gleichung mit *quadratischer Ergänzung*:
Wir betrachten als Beispiel

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

und formen äquivalent um. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rcl} & x^2 + 7x + 12 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & x^2 + 7x & = & -12 \\ \Longleftrightarrow & x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12 \\ \Longleftrightarrow & (x + \frac{7}{2})^2 & = & \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12 \\ \Longleftrightarrow & x & = & -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} \\ \Longleftrightarrow & x & = & -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-48}{4}} \end{array}$$

Quadratische Gleichungen

Lösung der Gleichung mit *quadratischer Ergänzung*:
Wir betrachten als Beispiel

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

und formen äquivalent um. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
x^2 + 7x + 12 &= 0 \\
\iff \quad x^2 + 7x &= -12 \\
\iff \quad x^2 + 7x + \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 &= \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 - 12 \\
\iff \quad (x + \tfrac{7}{2})^2 &= \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 - 12 \\
\iff \quad x &= -\tfrac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{7}{2}\right)^2 - 12} \\
\iff \quad x &= -\tfrac{7}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen

Lösung der Gleichung mit *quadratischer Ergänzung*:
Wir betrachten als Beispiel

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

und formen äquivalent um. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rccl}
 & x^2 + 7x + 12 & = & 0 \\
\Longleftrightarrow & x^2 + 7x & = & -12 \\
\Longleftrightarrow & x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12 \\
\Longleftrightarrow & (x + \frac{7}{2})^2 & = & \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12 \\
\Longleftrightarrow & x & = & -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} \\
\Longleftrightarrow & x & = & -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} \qquad \text{oder} \\
 & x & = & -\frac{7}{2} - \frac{1}{2}
\end{array}$$

Quadratische Gleichungen

Lösung der Gleichung mit *quadratischer Ergänzung*:
Wir betrachten als Beispiel

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

und formen äquivalent um. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rccl}
 & x^2 + 7x + 12 & = & 0 \\
\Longleftrightarrow & x^2 + 7x & = & -12 \\
\Longleftrightarrow & x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12 \\
\Longleftrightarrow & (x + \frac{7}{2})^2 & = & \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12 \\
\Longleftrightarrow & x & = & -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} \\
\Longleftrightarrow & x & = & -3 \qquad \text{oder} \\
 & x & = & -4
\end{array}$$

Quadratische Gleichungen

Lösung der Gleichung mit *quadratischer Ergänzung*:
Wir betrachten als Beispiel

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

und formen äquivalent um. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rccc}
 & x^2 + 7x + 12 & = & 0 \\
\iff & x^2 + 7x & = & -12 \\
\iff & x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12 \\
\iff & (x + \frac{7}{2})^2 & = & \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12 \\
\iff & x & = & -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} \\
\iff & x & = & -3 \qquad \vee \\
 & x & = & -4
\end{array}$$

Quadratische Gleichungen

Allgemein:

$$x^2 + px + q = 0$$

Quadratische Gleichungen

Allgemein:

$$\begin{aligned} & x^2 + px + q &= &\quad 0 \\ \iff & x^2 + px &= &\quad -q \end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen

Allgemein:

$$
\begin{aligned}
 & x^2 + px + q &=& \quad 0 \\
\iff & x^2 + px &=& \quad -q \\
\iff & x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &=& \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q
\end{aligned}
$$

Quadratische Gleichungen

Allgemein:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + px + q &=& \quad 0 \\
\iff \quad & x^2 + px &=& \quad -q \\
\iff \quad & x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &=& \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\iff \quad & (x + \tfrac{p}{2})^2 &=& \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q
\end{aligned}
$$

Quadratische Gleichungen

Allgemein:

$$
\begin{array}{rccc}
 & x^2 + px + q & = & 0 \\
\iff & x^2 + px & = & -q \\
\iff & x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\iff & (x + \frac{p}{2})^2 & = & \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\iff & x + \frac{p}{2} & = & \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \vee \\
 & x + \frac{p}{2} & = & -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}
\end{array}
$$

Quadratische Gleichungen

Allgemein:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + px + q &=& \quad 0 \\
\iff & x^2 + px &=& \quad -q \\
\iff & x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &=& \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\iff & (x + \tfrac{p}{2})^2 &=& \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\iff & x + \frac{p}{2} &=& \quad \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \vee \\
& x + \frac{p}{2} &=& \quad -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
\iff & x &=& \quad -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \vee \\
& x &=& \quad -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}
\end{aligned}
$$

Quadratische Gleichungen

Allgemein:

$$\begin{aligned}
& x^2 + px + q &=& \quad 0 \\
\iff & x^2 + px &=& \quad -q \\
\iff & x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &=& \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\iff & (x + \tfrac{p}{2})^2 &=& \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\iff & x + \frac{p}{2} &=& \quad \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
\iff & x &=& \quad -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}
\end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen

$$\begin{aligned} & x^2 + px + q &= \quad & 0 \\ \iff \quad & x &= \quad & -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x^2 + px + q &= 0 \\
\iff \quad x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
\iff \quad x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2-4q}{4}}
\end{aligned}
$$

Quadratische Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x^2 + px + q &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
\Longleftrightarrow \quad x &= -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2 - 4q}
\end{aligned}
$$

Quadratische Gleichungen

$$
\begin{aligned}
& x^2 + px + q && = && 0 && (*) \\
\iff & x && = && -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q} \\
\iff & x && = && -\tfrac{p}{2} \pm \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2 - 4q}
\end{aligned}
$$

Somit: Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung $(*)$ lautet:

- Wenn $p^2 \geq 4q$ ist:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{L} &= \left\{ -\tfrac{p}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2 - 4q}\,,\ -\tfrac{p}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2 - 4q} \right\} \\
&= \left\{ -\tfrac{p}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}\,,\ -\tfrac{p}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q} \right\}
\end{aligned}
$$

- Wenn $p^2 < 4q$ ist: $\mathbb{L} = \emptyset$.

Quadratische Gleichungen

$$
\begin{aligned}
& & x^2+px+q &= 0 & & (*)\\
&\Longleftrightarrow & x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} & &\\
&\Longleftrightarrow & x &= -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2-4q} & &
\end{aligned}
$$

Somit: Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung $(*)$ lautet:

- Wenn $p^2 \geq 4q$ ist:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{L} &= \left\{ -\frac{p}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2-4q}\,,\ -\frac{p}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2-4q} \right\}\\
&= \left\{ -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,,\ -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right\}
\end{aligned}
$$

- Wenn $p^2 < 4q$ ist: $\mathbb{L} = \emptyset$.

(Wenn $p^2 = 4q$ ist, ist $\mathbb{L} = \{ -\frac{p}{2} \}$.)

Kubische Gleichungen

Wir betrachten nun *kubische Gleichungen* oder *Gleichungen 3. Grades* mit trivialer rechter Seite:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mit Konstanten a, b, c.

Kubische Gleichungen

Wir betrachten nun *kubische Gleichungen* oder *Gleichungen 3. Grades* mit trivialer rechter Seite:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mit Konstanten a, b, c.

(Wir könnten auch noch eine Konstante vor x^3 zulassen, aber dies macht keinen Unterschied, weil wir durch diese gleich wieder teilen können.)

Kubische Gleichungen

Wir betrachten nun *kubische Gleichungen* oder *Gleichungen 3. Grades* mit trivialer rechter Seite:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mit Konstanten a, b, c.

(Wir könnten auch noch eine Konstante vor x^3 zulassen, aber dies macht keinen Unterschied, weil wir durch diese gleich wieder teilen können.)

Es gibt eine Lösungsformel für solche Gleichungen mit Quadratwurzeln und Kubikwurzeln. Diese ist aber ziemlich kompliziert ...

Kubische Gleichungen

Wir betrachten nun *kubische Gleichungen* oder *Gleichungen 3. Grades* mit trivialer rechter Seite:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mit Konstanten a, b, c.

(Wir könnten auch noch eine Konstante vor x^3 zulassen, aber dies macht keinen Unterschied, weil wir durch diese gleich wieder teilen können.)

Es gibt eine Lösungsformel für solche Gleichungen mit Quadratwurzeln und Kubikwurzeln. Diese ist aber ziemlich kompliziert ...

Es gibt einen großen Unterschied zu quadratischen Gleichungen:

Kubische Gleichungen

Wir betrachten nun *kubische Gleichungen* oder *Gleichungen 3. Grades* mit trivialer rechter Seite:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mit Konstanten a, b, c.

(Wir könnten auch noch eine Konstante vor x^3 zulassen, aber dies macht keinen Unterschied, weil wir durch diese gleich wieder teilen können.)

Es gibt eine Lösungsformel für solche Gleichungen mit Quadratwurzeln und Kubikwurzeln. Diese ist aber ziemlich kompliziert ...

Es gibt einen großen Unterschied zu quadratischen Gleichungen:

Es gibt immer eine Lösung!

Kubische Gleichungen

Satz. Für beliebige Konstanten a, b, c hat die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

stets eine Lösung.

Kubische Gleichungen / kubische Funktionen

Idee. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rccll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \mapsto & f(x) & := x^3 + ax^2 + bx + c \end{array}$$

Kubische Gleichungen / kubische Funktionen

Idee. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x &\mapsto \quad f(x) \quad := x^3 + ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

und deren Graph.

Kubische Gleichungen / kubische Funktionen

Idee. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rccll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \mapsto & f(x) & := x^3 + ax^2 + bx + c \end{array}$$

und deren Graph.
Die folgenden Aussagen erscheinen einleuchtend:

Kubische Gleichungen / kubische Funktionen

Idee. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) := x^3 + ax^2 + bx + c \end{array}$$

und deren Graph.
Die folgenden Aussagen erscheinen einleuchtend:

1. Es gibt eine Konstante C_1 mit: Für alle $x_1 \leq C_1$ ist $f(x_1) < 0$.

Kubische Gleichungen / kubische Funktionen

Idee. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) := x^3 + ax^2 + bx + c \end{array}$$

und deren Graph.
Die folgenden Aussagen erscheinen einleuchtend:

1. Es gibt eine Konstante C_1 mit: Für alle $x_1 \leq C_1$ ist $f(x_1) < 0$.
2. Es gibt eine Konstante C_2 mit: Für alle $x_2 \geq C_2$ ist $f(x_2) > 0$.

Kubische Gleichungen / kubische Funktionen

Idee. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \quad := x^3 + ax^2 + bx + c \end{array}$$

und deren Graph.
Die folgenden Aussagen erscheinen einleuchtend:

1. Es gibt eine Konstante C_1 mit: Für alle $x_1 \leq C_1$ ist $f(x_1) < 0$.
2. Es gibt eine Konstante C_2 mit: Für alle $x_2 \geq C_2$ ist $f(x_2) > 0$.
3. Seien x_1, x_2 zwei Zahlen mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$ gegeben. Dann gibt es eine Zahl x_0 zwischen x_1 und x_2 mit

$$f(x_0) = 0 \, .$$

Kubische Gleichungen / kubische Funktionen

Idee. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rccll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \mapsto & f(x) & := x^3 + ax^2 + bx + c \end{array}$$

und deren Graph.
Die folgenden Aussagen erscheinen einleuchtend:

1. Es gibt eine Konstante C_1 mit: Für alle $x_1 \leq C_1$ ist $f(x_1) < 0$.
2. Es gibt eine Konstante C_2 mit: Für alle $x_2 \geq C_2$ ist $f(x_2) > 0$.
3. Seien x_1, x_2 zwei Zahlen mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$ gegeben. Dann gibt es eine Zahl x_0 zwischen x_1 und x_2 mit

   $$f(x_0) = 0\ .$$

   ("Zwischen" heißt: $x_1 < x_0 < x_2$.)

Kubische Funktionen

$$f : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$$

Kubische Funktionen

$$f : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$$

Wir wollen die ersten beiden Aussagen beweisen. Die dritte Aussage ist nicht so leicht. (Kommt später.)

Kubische Funktionen

$$f : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$$

Wir wollen die ersten beiden Aussagen beweisen. Die dritte Aussage ist nicht so leicht. (Kommt später.)

Wir wollen zeigen:

Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit: Für alle $x \geq C$ ist $f(x) > 0$ und für alle $x \leq -C$ ist $f(x) < 0$.

Kubische Funktionen

$$f : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$$

Wir wollen die ersten beiden Aussagen beweisen. Die dritte Aussage ist nicht so leicht. (Kommt später.)

Wir wollen zeigen:

Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit: Für alle $x \geq C$ ist $f(x) > 0$ und für alle $x \leq -C$ ist $f(x) < 0$.

Wir zeigen mehr:

Es gibt eine Konstante C mit:

- *Für alle $x \geq C$ ist $\frac{1}{2} \cdot x^3 \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \cdot x^3$*
- *für alle $x \leq -C$ ist $\frac{1}{2} \cdot x^3 \geq f(x) \geq \frac{3}{2} \cdot x^3$.*

Kubische Funktionen

$$f : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$$

Wir wollen die ersten beiden Aussagen beweisen. Die dritte Aussage ist nicht so leicht. (Kommt später.)

Wir wollen zeigen:

Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit: Für alle $x \geq C$ ist $f(x) > 0$ und für alle $x \leq -C$ ist $f(x) < 0$.

Wir zeigen mehr:

Es gibt eine Konstante C mit:

- *Für alle $x \geq C$ ist* $\frac{1}{2} \cdot x^3 \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \cdot x^3$
- *für alle $x \leq -C$ ist* $\frac{1}{2} \cdot x^3 \geq f(x) \geq \frac{3}{2} \cdot x^3$.

Wir werden sogar eine Formel für so eine Konstante finden.

Exkurs: "Dreiecksungleichung"

Wir benötigen:

Für je zwei Zahlen α, β ist

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \ .$$

Exkurs: “Dreiecksungleichung”

Wir benötigen:

Für je zwei Zahlen α, β ist

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \ .$$

Begründung.

Exkurs: “Dreiecksungleichung”

Wir benötigen:

Für je zwei Zahlen α, β ist

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \ .$$

Begründung.

OE (Ohne Einschränkung) / OBdA (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) ist $|\alpha| \geq |\beta|$ und $\alpha \geq 0$.

Exkurs: “Dreiecksungleichung”

Wir benötigen:

Für je zwei Zahlen α, β ist

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \; .$$

Begründung.

OE (Ohne Einschränkung) / OBdA (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) ist $|\alpha| \geq |\beta|$ und $\alpha \geq 0$.

Es gibt nun zwei Fälle:

Exkurs: “Dreiecksungleichung”

Wir benötigen:

Für je zwei Zahlen α, β ist

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \ .$$

Begründung.

OE (Ohne Einschränkung) / OBdA (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) ist $|\alpha| \geq |\beta|$ und $\alpha \geq 0$.

Es gibt nun zwei Fälle:

- $\beta \geq 0$: Dann ist $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta = |\alpha| + |\beta|$.

Exkurs: “Dreiecksungleichung”

Wir benötigen:

Für je zwei Zahlen α, β ist

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \ .$$

Begründung.

OE (Ohne Einschränkung) / OBdA (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) ist $|\alpha| \geq |\beta|$ und $\alpha \geq 0$.

Es gibt nun zwei Fälle:

- $\beta \geq 0$: Dann ist $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta = |\alpha| + |\beta|$.
- $\beta < 0$: Dann ist immer noch $\alpha + \beta \geq 0$ und
  $$|\alpha + \beta| = \alpha + \beta < \alpha = |\alpha| < |\alpha| + |\beta|.$$

Kubische Funktionen

$$f : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$$

Wir schreiben $f(x) = x^3 \cdot (1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}) \quad$ (für $\;x \neq 0$).

Wir wollen eine Zahl C finden mit: Für alle Zahlen x mit $|x| \geq C$ ist

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{3}{2}\,.$$

Kubische Funktionen

$$f : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$$

Wir schreiben $f(x) = x^3 \cdot (1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}) \quad (\text{für} \;\; x \neq 0)$.

Wir wollen eine Zahl C finden mit: Für alle Zahlen x mit $|x| \geq C$ ist

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{3}{2} \, .$$

Mit so einer Konstanten gilt

- für alle $x \geq C$: $\frac{1}{2} \cdot x^3 \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \cdot x^3$

Kubische Funktionen

$$f : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$$

Wir schreiben $f(x) = x^3 \cdot (1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}) \quad$ (für $\; x \neq 0$).

Wir wollen eine Zahl C finden mit: Für alle Zahlen x mit $|x| \geq C$ ist

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{3}{2}\,.$$

Mit so einer Konstanten gilt

- für alle $x \geq C$: $\frac{1}{2} \cdot x^3 \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \cdot x^3$
- für alle $x \leq -C$: $\frac{1}{2} \cdot x^3 \geq f(x) \geq \frac{3}{2} \cdot x^3$

Kubische Funktionen

Unter welcher Bedingung an $|x|$ gilt

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{3}{2} \quad ?$$

Kubische Funktionen

Unter welcher Bedingung an $|x|$ gilt

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{3}{2} \quad ?$$

Beziehungsweise:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{1}{2}$$

Kubische Funktionen

Unter welcher Bedingung an $|x|$ gilt

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{3}{2} \quad ?$$

Beziehungsweise:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{1}{2}$$

Wichtig. Es ist keine "genau-dann-wenn Bedingung" gefragt. Wir wollen nur ein $C > 0$ finden mit welchem für alle x mit $|x| \geq C$ die Ungleichungen gelten.

Kubische Funktionen

Unter welcher Bedingung an $|x|$ gilt

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{3}{2} \quad ?$$

Beziehungsweise:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{1}{2}$$

Wichtig. Es ist keine "genau-dann-wenn Bedingung" gefragt. Wir wollen nur ein $C > 0$ finden mit welchem für alle x mit $|x| \geq C$ die Ungleichungen gelten. Das ist leichter!

Kubische Funktionen

Unter welcher (hinreichender) Bedingung an $|x|$ gilt

$$|\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}| \leq \frac{1}{2} \quad ? \quad (*)$$

Kubische Funktionen

Unter welcher (hinreichender) Bedingung an $|x|$ gilt

$$|\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}| \le \frac{1}{2} \quad ? \quad (*)$$

Idee. Wenn

$$|\frac{a}{x}| \le \frac{1}{6} \text{ und } |\frac{b}{x^2}| \le \frac{1}{6} \text{ und } |\frac{c}{x^3}| \le \frac{1}{6}$$

gilt, gilt auch $(*)$.

Kubische Funktionen

Unter welcher (hinreichender) Bedingung an $|x|$ gilt

$$|\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}| \leq \frac{1}{2} \quad ? \quad (*)$$

Idee. Wenn

$$|\frac{a}{x}| \leq \frac{1}{6} \ \wedge \ |\frac{b}{x^2}| \leq \frac{1}{6} \ \wedge \ |\frac{c}{x^3}| \leq \frac{1}{6}$$

gilt, gilt auch $(*)$.

Kubische Funktionen

Unter welcher (hinreichender) Bedingung an $|x|$ gilt

$$\left|\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right| \leq \frac{1}{2} \quad ? \quad (*)$$

Idee. Wenn

$$\left|\frac{a}{x}\right| \leq \frac{1}{6} \ \wedge\ \left|\frac{b}{x^2}\right| \leq \frac{1}{6} \ \wedge\ \left|\frac{c}{x^3}\right| \leq \frac{1}{6} \quad (**)$$

gilt, gilt auch $(*)$.

Die Bedingung $(**)$ ist äquivalent zu:

$$6|a| \leq |x| \ \wedge\ 6|b| \leq |x|^2 \ \wedge\ 6|c| \leq |x|^3$$

Kubische Funktionen

Unter welcher (hinreichender) Bedingung an $|x|$ gilt

$$|\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}| \leq \frac{1}{2} \quad ? \quad (*)$$

Idee. Wenn

$$|\frac{a}{x}| \leq \frac{1}{6} \ \wedge \ |\frac{b}{x^2}| \leq \frac{1}{6} \ \wedge \ |\frac{c}{x^3}| \leq \frac{1}{6} \quad (**)$$

gilt, gilt auch $(*)$.

Die Bedingung $(**)$ ist äquivalent zu:

$$6|a| \leq |x| \ \wedge \ 6|b| \leq |x|^2 \ \wedge \ 6|c| \leq |x|^3, \text{ d.h.}$$

$$6|a| \leq |x| \ \wedge \ \sqrt[2]{6|b|} \leq |x| \ \wedge \ \sqrt[3]{6|c|} \leq |x|$$

Kubische Funktionen

Wir suchen eine Bedingung an $|x|$ unter der gilt:

$$6|a| \leq |x| \ \wedge \ \sqrt[2]{6|b|} \leq |x| \ \wedge \ \sqrt[3]{6|c|} \leq |x|$$

Kubische Funktionen

Wir suchen eine Bedingung an $|x|$ unter der gilt:

$$6|a| \leq |x| \;\wedge\; \sqrt[2]{6|b|} \leq |x| \;\wedge\; \sqrt[3]{6|c|} \leq |x|$$

Wir setzen

$$C := \max\left(\, 6|a|\,,\ \sqrt[2]{6|b|}\,,\ \sqrt[3]{6|c|}\,\right)\,.$$

Kubische Funktionen

Wir suchen eine Bedingung an $|x|$ unter der gilt:

$$6|a| \leq |x| \ \wedge \ \sqrt[2]{6|b|} \leq |x| \ \wedge \ \sqrt[3]{6|c|} \leq |x|$$

Wir setzen

$$C := \max\left(\, 6|a|\,,\ \sqrt[2]{6|b|}\,,\ \sqrt[3]{6|c|}\,\right).$$

Dann gilt für alle Zahlen x mit $|x| \geq C$:

$$\left|\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Kubische Funktionen

Wir suchen eine Bedingung an $|x|$ unter der gilt:

$$6|a| \leq |x| \ \wedge \ \sqrt[2]{6|b|} \leq |x| \ \wedge \ \sqrt[3]{6|c|} \leq |x|$$

Wir setzen

$$C := \max\left(6|a|\, , \ \sqrt[2]{6|b|}\, , \ \sqrt[3]{6|c|} \ \right) .$$

Dann gilt für alle Zahlen x mit $|x| \geq C$:

$$|\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}| \leq \frac{1}{2}\ ,$$

d.h.

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{1}{2}$$

Kubische Funktionen

Wir suchen eine Bedingung an $|x|$ unter der gilt:

$$6|a| \leq |x| \ \wedge \ \sqrt[2]{6|b|} \leq |x| \ \wedge \ \sqrt[3]{6|c|} \leq |x|$$

Wir setzen

$$C := \max\left(6|a| \, , \, \sqrt[2]{6|b|} \, , \, \sqrt[3]{6|c|} \right) .$$

Dann gilt für alle Zahlen x mit $|x| \geq C$:

$$\left|\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right| \leq \frac{1}{2} \, ,$$

d.h.

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{1}{2} \, ,$$

d.h.

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{3}{2} \, .$$

Kubische Funktionen

Wir suchen eine Bedingung an $|x|$ unter der gilt:

$$6|a| \leq |x| \ \wedge \ \sqrt[2]{6|b|} \leq |x| \ \wedge \ \sqrt[3]{6|c|} \leq |x|$$

Wir setzen

$$C := \max\left(6|a|\, , \ \sqrt[2]{6|b|}\, , \ \sqrt[3]{6|c|} \ \right) .$$

Dann gilt für alle Zahlen x mit $|x| \geq C$:

$$\left|\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right| \leq \frac{1}{2} \ ,$$

d.h.

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{1}{2} \ ,$$

d.h.

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{3}{2} \ .$$

(Außer wenn $a = b = c = 0$, dann ist $C = 0$ und man muss hier $x = C = 0$ ausschließen.)

Kubische Funktionen

Für Zahlen x mit $|x| \geq C$ ist

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{3}{2} \, .$$

Kubische Funktionen

Für Zahlen x mit $|x| \geq C$ ist

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{3}{2} .$$

Mit

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 \cdot \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right)$$

folgt

Kubische Funktionen

Für Zahlen x mit $|x| \geq C$ ist

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \leq \frac{3}{2}\,.$$

Mit

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 \cdot \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right)$$

folgt:

- Für $x \geq C$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot x^3 \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \cdot x^3$
- Für $x \leq -C$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot x^3 \geq f(x) \geq \frac{3}{2} \cdot x^3$

Allgemeine polynomielle Gleichungen

Eine *polynomielle Gleichung n-ten Grades* mit trivialer rechter Seite ist eine Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit festen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$, wobei $a_n \neq 0$ ist, und einer "Unbestimmten" x.

Allgemeine polynomielle Gleichungen

Eine *polynomielle Gleichung n-ten Grades* mit trivialer rechter Seite ist eine Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit festen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$, wobei $a_n \neq 0$ ist, und einer "Unbestimmten" x.

Wenn $a_n = 1$ ist, hat man

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \; .$$

Man spricht dann von einer *normierten polynomiellen Gleichung*.

Polynomielle Gleichungen

Es ist ein großer Unterschied, ob der Grad gerade oder ungerade ist:

- Wenn der Grad ungerade (also $1, 3, 5, \ldots$) ist, gibt es immer eine Lösung.
- Wenn der Grad gerade ist (also $2, 4, \ldots$), hängt es von der Gleichung ab – nanchmal gibt es welche und manchmal nicht.

Also:

Satz. Eine polynomielle Gleichung ungeraden Grades hat stets eine Lösung.

Polynomielle Gleichungen

Es ist ein großer Unterschied, ob der Grad gerade oder ungerade ist:

- Wenn der Grad ungerade (also $1, 3, 5, \ldots$) ist, gibt es immer eine Lösung.
- Wenn der Grad gerade ist (also $2, 4, \ldots$), hängt es von der Gleichung ab – nanchmal gibt es welche und manchmal nicht.

Also:

Satz. Eine polynomielle Gleichung ungeraden Grades hat stets eine Lösung.

Und: Für jede gerade Zahl n gibt es (mindestens) eine polynomielle Gleichung n-ten Grades, die eine Lösung hat und (mindestens) eine, die keine Lösung hat.

Polynomielle Gleichungen ungeraden Grades

Satz. Eine polynomielle Gleichung ungeraden Grades hat stets eine Lösung.

Polynomielle Gleichungen ungeraden Grades

Satz. Eine polynomielle Gleichung ungeraden Grades hat stets eine Lösung.

Dies beweist man ganz analog zum Beweis für Gleichungen 3. Grades:

Man betrachtet die *polynomielle Funktion* / *Polynomfunktion* *n-ten Grades*

$$\begin{array}{rccll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \mapsto & f(x) & := a_n x^n + a_{n-1} x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

und geht "genauso" vor wie zuvor.

Nullstellensatz

Wir formulieren zunächst den "Nullstellensatz" für Polynomfunktionen:

Satz. Es sei eine Polynomfunktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

gegeben und es seien $x_1 < x_2$ zwei Zahlen mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$.

Nullstellensatz

Wir formulieren zunächst den “Nullstellensatz” für Polynomfunktionen:

Satz. Es sei eine Polynomfunktion

$$\begin{array}{rclcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \mapsto & f(x) & := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

gegeben und es seien $x_1 < x_2$ zwei Zahlen mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$.

Dann hat die Funktion f immer mindestens eine Nullstelle zwischen x_1 und x_2,

Nullstellensatz

Wir formulieren zunächst den "Nullstellensatz" für Polynomfunktionen:

Satz. Es sei eine Polynomfunktion

$$
\begin{array}{rcll}
f: \ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\
x & \mapsto & f(x) & := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0
\end{array}
$$

gegeben und es seien $x_1 < x_2$ zwei Zahlen mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$.

Dann hat die Funktion f immer mindestens eine Nullstelle zwischen x_1 und x_2,

d.h. es gibt eine Zahl x mit $x_1 < x_0 < x_2$ und

$$f(x_0) = 0\ .$$

Polynomielle Funktionen ungeraden Grades

Satz. Es sei eine normierte Polynomfunktion

$$\begin{array}{rccccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & x & \mapsto & f(x) & = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

ungeraden Grades gegeben.

Es gibt nun eine Konstante $C > 0$ mit:

- Für $x \geq C$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot x^n \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \cdot x^n$
- Für $x \leq -C$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot x^n \geq f(x) \geq \frac{3}{2} \cdot x^n$

Polynomielle Funktionen geraden Grades

In Analogie zum obigen Satz haben wir:

Polynomielle Funktionen geraden Grades

In Analogie zum obigen Satz haben wir:

Satz. Es sei eine normierte Polynomfunktion

$$\begin{array}{rcccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \mapsto & f(x) & = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

geraden Grades gegeben.

Es gibt nun eine Konstante $C > 0$ mit:

- Für $x \geq C$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot x^n \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \cdot x^n$
- Für $x \leq -C$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot x^n \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \cdot x^n$

Polynomielle Funktionen geraden Grades

In Analogie zum obigen Satz haben wir:

Satz. Es sei eine normierte Polynomfunktion

$$\begin{array}{rccll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \mapsto & f(x) & = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

geraden Grades gegeben.

Es gibt nun eine Konstante $C > 0$ mit:

- Für $x \geq C$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot x^n \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \cdot x^n$
- Für $x \leq -C$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot x^n \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \cdot x^n$

Mit einem Wort: Für alle Zahlen x mit $|x| \geq C$ gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot x^n \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \cdot x^n$$

Polynomielle Gleichungen geraden Grades

Behauptung. Zu jeder gerade Zahl n gibt es (mindestens) eine polynomielle Gleichung n-ten Grades, die eine Lösung hat, und (mindestens) eine, die keine Lösung hat.

Polynomielle Gleichungen geraden Grades

Behauptung. Zu jeder gerade Zahl n gibt es (mindestens) eine polynomielle Gleichung n-ten Grades, die eine Lösung hat, und (mindestens) eine, die keine Lösung hat.

Beweis. Sei $n = 2k$, k eine natürliche Zahl.

1. Die Gleichung

$$x^n = 1$$

hat die Lösung $x = 1$.

Polynomielle Gleichungen geraden Grades

Behauptung. Zu jeder gerade Zahl n gibt es (mindestens) eine polynomielle Gleichung n-ten Grades, die eine Lösung hat, und (mindestens) eine, die keine Lösung hat.

Beweis. Sei $n = 2k$, k eine natürliche Zahl.

1. Die Gleichung

$$x^n = 1$$

hat die Lösung $x = 1$.

2. Wir betrachten die Gleichung

$$x^n + 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x^n = -1$$

Polynomielle Gleichungen geraden Grades

Behauptung. Zu jeder gerade Zahl n gibt es (mindestens) eine polynomielle Gleichung n-ten Grades, die eine Lösung hat, und (mindestens) eine, die keine Lösung hat.

Beweis. Sei $n = 2k$, k eine natürliche Zahl.

1. Die Gleichung

$$x^n = 1$$

hat die Lösung $x = 1$.

2. Wir betrachten die Gleichung

$$x^n + 1 = 0 \;\text{ bzw. }\; x^n = -1\,,\;\text{ d.h. }\; x^{2k} = -1\,.$$

Polynomielle Gleichungen geraden Grades

Behauptung. Zu jeder gerade Zahl n gibt es (mindestens) eine polynomielle Gleichung n-ten Grades, die eine Lösung hat, und (mindestens) eine, die keine Lösung hat.

Beweis. Sei $n = 2k$, k eine natürliche Zahl.

1. Die Gleichung

$$x^n = 1$$

hat die Lösung $x = 1$.

2. Wir betrachten die Gleichung

$$x^n + 1 = 0 \ \text{ bzw. } \ x^n = -1\ , \ \text{ d.h. } \ x^{2k} = -1\ .$$

Angenommen, es gäbe eine Zahl x_0 mit $x_0^{2k} = -1$.

Polynomielle Gleichungen geraden Grades

Behauptung. Zu jeder gerade Zahl n gibt es (mindestens) eine polynomielle Gleichung n-ten Grades, die eine Lösung hat, und (mindestens) eine, die keine Lösung hat.

Beweis. Sei $n = 2k$, k eine natürliche Zahl.

1. Die Gleichung

$$x^n = 1$$

hat die Lösung $x = 1$.

2. Wir betrachten die Gleichung

$$x^n + 1 = 0 \;\text{ bzw. }\; x^n = -1\,, \;\text{ d.h. }\; x^{2k} = -1\,.$$

Angenommen, es gäbe eine Zahl x_0 mit $x_0^{2k} = -1$. Wir setzen $z_0 := x_0^k$

Polynomielle Gleichungen geraden Grades

Behauptung. Zu jeder gerade Zahl n gibt es (mindestens) eine polynomielle Gleichung n-ten Grades, die eine Lösung hat, und (mindestens) eine, die keine Lösung hat.

Beweis. Sei $n = 2k$, k eine natürliche Zahl.

1. Die Gleichung

$$x^n = 1$$

hat die Lösung $x = 1$.

2. Wir betrachten die Gleichung

$$x^n + 1 = 0 \ \text{ bzw. } \ x^n = -1 \ , \ \text{ d.h. } \ x^{2k} = -1 \ .$$

Angenommen, es gäbe eine Zahl x_0 mit $x_0^{2k} = -1$. Wir setzen $z_0 := x_0^k$ und erhalten

$$z_0^2 = x_0^{2k} = -1$$

Polynomielle Gleichungen geraden Grades

Behauptung. Zu jeder gerade Zahl n gibt es (mindestens) eine polynomielle Gleichung n-ten Grades, die eine Lösung hat, und (mindestens) eine, die keine Lösung hat.

Beweis. Sei $n = 2k$, k eine natürliche Zahl.

1. Die Gleichung

$$x^n = 1$$

hat die Lösung $x = 1$.

2. Wir betrachten die Gleichung

$$x^n + 1 = 0 \;\text{ bzw. }\; x^n = -1 \,,\; \text{d.h. }\; x^{2k} = -1 \,.$$

Angenommen, es gäbe eine Zahl x_0 mit $x_0^{2k} = -1$. Wir setzen $z_0 := x_0^k$ und erhalten

$$z_0^2 = x_0^{2k} = -1 \,.$$

Das geht nicht!

Wurzeln

Wir haben schon ab §2 (“Rechenregeln”) (implizit) benutzt:

Zu jeder positiven Zahl a und jeder natürlichen Zahl n gibt es genau eine positive Zahl b mit

$$b^n = a \, .$$

Diese Zahl b heißt dann die (positive) *n-te Wurzel* aus a und wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet.

Wurzeln

Es ist leicht zu sehen, dass es *höchstens eine* solche Zahl b gibt.

D.h. es gibt keine zwei verschiedenen positiven Zahlen b_1, b_2 mit

$$b_1^n = b_2^n = a \ .$$

Wurzeln

Es ist leicht zu sehen, dass es *höchstens eine* solche Zahl b gibt.

D.h. es gibt keine zwei verschiedenen positiven Zahlen b_1, b_2 mit

$$b_1^n = b_2^n = a \; .$$

Das stimmt:

Seien b_1, b_2 zwei verschiedene positive Zahlen. Sagen wir (OE) $b_1 < b_2$. Dann ist auch $b_1^n < b_2^n$. Damit kann unmöglich

$$a = b_1^n \;\; \text{und} \;\; a = b_2^n$$

sein.

Wurzeln

Wir müssen zeigen, dass es in der Tat (mindestens) eine positive Zahl b mit

$$b^n = a$$

gibt.

Dies beweisen wir nun Grundlage des Nullstellensatzes für Polynomfunktionen:

Für gegebenes a und $n > 1$ betrachten wir die Polynomfunktion

$$f : x \mapsto x^n - a\ .$$

Wurzeln

Wir müssen zeigen, dass es in der Tat (mindestens) eine positive Zahl b mit

$$b^n = a$$

gibt.

Dies beweisen wir nun Grundlage des Nullstellensatzes für Polynomfunktionen:

Für gegebenes a und $n > 1$ betrachten wir die Polynomfunktion

$$f : x \mapsto x^n - a \ .$$

Es ist $f(0) = -a < 0$.

Wurzeln

Wir müssen zeigen, dass es in der Tat (mindestens) eine positive Zahl b mit

$$b^n = a$$

gibt.

Dies beweisen wir nun Grundlage des Nullstellensatzes für Polynomfunktionen:

Für gegebenes a und $n > 1$ betrachten wir die Polynomfunktion

$$f : x \mapsto x^n - a \,.$$

Es ist $f(0) = -a < 0$.

Wir wollen zeigen, dass es ein $x_0 > 0$ mit $f(x_0) > 0$ gibt. Wir dürfen hier aber nicht schon die Wurzel verwenden!

Wurzeln

$$f : x \mapsto x^n - a,$$

$$f(0) = -a < 0 \ .$$

Wurzeln

$$f : x \mapsto x^n - a,$$

$$f(0) = -a < 0\ .$$

Fallunterscheidung:

- Wenn $a > 1$ ist, ist $f(a) = a^n - a > 0$.
- Wenn $0 < a < 1$ ist, ist $f(1) = 1 - a > 0$.
- Wenn $a = 1$ ist, ist nichts zu zeigen.

Wurzeln

$$f : x \mapsto x^n - a,$$

$$f(0) = -a < 0 \ .$$

Fallunterscheidung:

- Wenn $a > 1$ ist, ist $f(a) = a^n - a > 0$.
- Wenn $0 < a < 1$ ist, ist $f(1) = 1 - a > 0$.
- Wenn $a = 1$ ist, ist nichts zu zeigen.

Wir können also den Nullstellensatz anwenden:

Die Funktion f hat eine Nullstelle im Intervall $(0, \infty)$
(nach dem Obigen genau eine Nullstelle im Intervall $(0, \infty)$).

Wir erhalten: Es gibt (genau) eine positive Zahl b mit

$$b^n = a \ .$$

Wurzeln

Man kann nun definieren:

Definition. Die eindeutig bestimmte Zahl positive Zahl b mit $b^n = a$ wird die (positive) n-te Wurzel von a genannt und mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet.

Wurzeln

Man kann nun definieren:

Definition. Die eindeutig bestimmte Zahl positive Zahl b mit $b^n = a$ wird die (positive) n-te Wurzel von a genannt und mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet.

Zur Beachtung. Wenn eine positive Zahl b mit $b^n = a$ gegeben ist, dann ist automatisch b *die* (positive) Wurzel von a, also $b = \sqrt[n]{a}$.

Lösungen approximieren

Wir wenden uns wieder einer polynomiellen Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

zu.

Lösungen approximieren

Wir wenden uns wieder einer polynomiellen Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

zu.

Eine Lösung mit den Grundrechenarten und Wurzelziehen zu finden, ist schwer oder sogar unmöglich, wenn die Gleichung nicht quadratisch ist.

Lösungen approximieren

Wir wenden uns wieder einer polynomiellen Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

zu.

Eine Lösung mit den Grundrechenarten und Wurzelziehen zu finden, ist schwer oder sogar unmöglich, wenn die Gleichung nicht quadratisch ist. (Hierzu gibt es eine umfangreiche mathematische Theorie.)

Lösungen approximieren

Wir wenden uns wieder einer polynomiellen Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

zu.

Eine Lösung mit den Grundrechenarten und Wurzelziehen zu finden, ist schwer oder sogar unmöglich, wenn die Gleichung nicht quadratisch ist. (Hierzu gibt es eine umfangreiche mathematische Theorie.)

Deshalb wollen wir eine Lösung approximieren.

Lösungen approximieren

Wir wenden uns wieder einer polynomiellen Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

zu.

Eine Lösung mit den Grundrechenarten und Wurzelziehen zu finden, ist schwer oder sogar unmöglich, wenn die Gleichung nicht quadratisch ist. (Hierzu gibt es eine umfangreiche mathematische Theorie.)

Deshalb wollen wir eine Lösung approximieren. Wir wollen mit möglichst wenig Rechenaufwand sagen können:

Entweder: Hier ist eine exakte Lösung!

Oder: Hier ist ein kleines Intervall, in welchem eine Lösung liegt!

Lösungen approximieren

Wir betrachten wieder die Polynomfunktion

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ . \end{aligned}$$

Wir wollen also eine Nullstelle von f approximativ bestimmen.

Lösungen approximieren

Wir betrachten wieder die Polynomfunktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,. \end{array}$$

Wir wollen also eine Nullstelle von f approximativ bestimmen.

Wir gegen davon aus, dass wir zwei Zahlen $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$ kennen. (Wenn $f(x_1) > 0$ und $f(x_2) < 0$ ist, geht es auch – ganz analog.)

Lösungen approximieren

Wir betrachten wieder die Polynomfunktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,. \end{array}$$

Wir wollen also eine Nullstelle von f approximativ bestimmen.

Wir gegen davon aus, dass wir zwei Zahlen $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$ kennen. (Wenn $f(x_1) > 0$ und $f(x_2) < 0$ ist, geht es auch – ganz analog.)

Wenn der Grad ungerade ist, kann man solche Zahlen ausrechnen.

Lösungen approximieren

Wir betrachten wieder die Polynomfunktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ . \end{array}$$

Wir wollen also eine Nullstelle von f approximativ bestimmen.

Wir gegen davon aus, dass wir zwei Zahlen $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$ kennen. (Wenn $f(x_1) > 0$ und $f(x_2) < 0$ ist, geht es auch – ganz analog.)

Wenn der Grad ungerade ist, kann man solche Zahlen ausrechnen.

Wir wissen dann also, dass f im "offenen" Intervall (x_1, x_2) eine Nullstelle hat.

Lösungen approximieren

Wir betrachten wieder die Polynomfunktion

$$\begin{array}{rccll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & x & \mapsto & f(x) & := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ . \end{array}$$

Wir wollen also eine Nullstelle von f approximativ bestimmen.

Wir gegen davon aus, dass wir zwei Zahlen $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$ kennen. (Wenn $f(x_1) > 0$ und $f(x_2) < 0$ ist, geht es auch – ganz analog.)

Wenn der Grad ungerade ist, kann man solche Zahlen ausrechnen.

Wir wissen dann also, dass f im "offenen" Intervall (x_1, x_2) eine Nullstelle hat.

Wir betrachen nun den Mittelwert x_3 von x_1 und x_2:

$$x_3 := \frac{x_1 + x_2}{2}$$

und rechnen $f(x_3)$ aus.

Lösungen approximieren

Wir haben $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$ und:

entweder $f(x_3) = 0$ oder $f(x_3) < 0$ oder $f(x_3) > 0$.

Lösungen approximieren

Wir haben $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$ und:
entweder $f(x_3) = 0$ oder $f(x_3) < 0$ oder $f(x_3) > 0$.

Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten Fall tauschen wir x_1 mit x_3 aus. Im dritten Fall tauschen wir x_2 mit x_3 aus.

Lösungen approximieren

Wir haben $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$ und:
entweder $f(x_3) = 0$ oder $f(x_3) < 0$ oder $f(x_3) > 0$.

Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten Fall tauschen wir x_1 mit x_3 aus. Im dritten Fall tauschen wir x_2 mit x_3 aus.

Wir haben dann also die Läge des Intervalls halbiert. Wir kommen so sehr schnell vorwärts.

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ approximieren. Wir betrachten also die Polynomfunktion f mit

$$x \mapsto f(x) := x^2 - 2\,.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} f(1) &= -1 &< 0 \\ f(2) &= 2 &> 0 \end{aligned}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ approximieren. Wir betrachten also die Polynomfunktion f mit

$$x \mapsto f(x) := x^2 - 2 \,.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} f(1) &= -1 && < 0 \\ f(2) &= 2 && > 0 \\ f(\tfrac{3}{2}) &= \tfrac{9}{4} - 2 && > 0 \end{aligned}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ approximieren. Wir betrachten also die Polynomfunktion f mit

$$x \mapsto f(x) := x^2 - 2 \, .$$

Wir haben

$$\begin{array}{lclll} f(1) & = & -1 & < 0 & \\ f(2) & = & 2 & > 0 & \\ f(\frac{3}{2}) & = & \frac{9}{4} - 2 & > 0 & , 2 = \frac{4}{2} \end{array}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ approximieren. Wir betrachten also die Polynomfunktion f mit

$$x \mapsto f(x) := x^2 - 2\,.$$

Wir haben

$$\begin{array}{rclcl}
f(1) & = & -1 & < 0 & \\
f(2) & = & 2 & > 0 & \\
f(\frac{3}{2}) & = & \frac{9}{4} - 2 & > 0 & , 2 = \frac{4}{2} \\
f(\frac{5}{4}) & = & \frac{25}{16} - 2 & < 0 &
\end{array}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ approximieren. Wir betrachten also die Polynomfunktion f mit

$$x \mapsto f(x) := x^2 - 2\,.$$

Wir haben

$$\begin{array}{rclll}
f(1) & = & -1 & < 0 & \\
f(2) & = & 2 & > 0 & \\
f(\frac{3}{2}) & = & \frac{9}{4} - 2 & > 0 & , 2 = \frac{4}{2} \\
f(\frac{5}{4}) & = & \frac{25}{16} - 2 & < 0 & , \frac{3}{2} = \frac{6}{4}
\end{array}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ approximieren. Wir betrachten also die Polynomfunktion f mit

$$x \mapsto f(x) := x^2 - 2 \,.$$

Wir haben

$$\begin{array}{rclll} f(1) & = & -1 & < 0 & \\ f(2) & = & 2 & > 0 & \\ f(\frac{3}{2}) & = & \frac{9}{4} - 2 & > 0 & , 2 = \frac{4}{2} \\ f(\frac{5}{4}) & = & \frac{25}{16} - 2 & < 0 & , \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \\ f(\frac{11}{8}) & = & \frac{121}{64} - 2 & < 0 & \end{array}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ approximieren. Wir betrachten also die Polynomfunktion f mit

$$x \mapsto f(x) := x^2 - 2 \,.$$

Wir haben

$$\begin{array}{rclll}
f(1) & = & -1 & < 0 & \\
f(2) & = & 2 & > 0 & \\
f(\frac{3}{2}) & = & \frac{9}{4} - 2 & > 0 & , 2 = \frac{4}{2} \\
f(\frac{5}{4}) & = & \frac{25}{16} - 2 & < 0 & , \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \\
f(\frac{11}{8}) & = & \frac{121}{64} - 2 & < 0 & , \frac{3}{2} = \frac{12}{8}
\end{array}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ approximieren. Wir betrachten also die Polynomfunktion f mit

$$x \mapsto f(x) := x^2 - 2\,.$$

Wir haben

$$\begin{array}{rclll}
f(1) & = & -1 & < 0 & \\
f(2) & = & 2 & > 0 & \\
f(\frac{3}{2}) & = & \frac{9}{4} - 2 & > 0 & , 2 = \frac{4}{2} \\
f(\frac{5}{4}) & = & \frac{25}{16} - 2 & < 0 & , \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \\
f(\frac{11}{8}) & = & \frac{121}{64} - 2 & < 0 & , \frac{3}{2} = \frac{12}{8} \\
f(\frac{23}{16}) & = & \frac{529}{256} - 2 & > 0 &
\end{array}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ approximieren. Wir betrachten also die Polynomfunktion f mit

$$x \mapsto f(x) := x^2 - 2\ .$$

Wir haben

$$\begin{array}{rclll}
f(1) & = & -1 & < 0 & \\
f(2) & = & 2 & > 0 & \\
f(\frac{3}{2}) & = & \frac{9}{4} - 2 & > 0 & , 2 = \frac{4}{2} \\
f(\frac{5}{4}) & = & \frac{25}{16} - 2 & < 0 & , \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \\
f(\frac{11}{8}) & = & \frac{121}{64} - 2 & < 0 & , \frac{3}{2} = \frac{12}{8} \\
f(\frac{23}{16}) & = & \frac{529}{256} - 2 & > 0 & , \frac{11}{8} = \frac{22}{16}
\end{array}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ approximieren. Wir betrachten also die Polynomfunktion f mit

$$x \mapsto f(x) := x^2 - 2 \,.$$

Wir haben

$$\begin{array}{rclll}
f(1) & = & -1 & < 0 & \\
f(2) & = & 2 & > 0 & \\
f(\frac{3}{2}) & = & \frac{9}{4} - 2 & > 0 & , 2 = \frac{4}{2} \\
f(\frac{5}{4}) & = & \frac{25}{16} - 2 & < 0 & , \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \\
f(\frac{11}{8}) & = & \frac{121}{64} - 2 & < 0 & , \frac{3}{2} = \frac{12}{8} \\
f(\frac{23}{16}) & = & \frac{529}{256} - 2 & > 0 & , \frac{11}{8} = \frac{22}{16} \\
f(\frac{45}{32}) & = & \frac{2025}{1024} - 2 & < 0 &
\end{array}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ approximieren. Wir betrachten also die Polynomfunktion f mit

$$x \mapsto f(x) := x^2 - 2\,.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
f(1) &= -1 &< 0 & \\
f(2) &= 2 &> 0 & \\
f(\tfrac{3}{2}) &= \tfrac{9}{4} - 2 &> 0 &\quad , 2 = \tfrac{4}{2} \\
f(\tfrac{5}{4}) &= \tfrac{25}{16} - 2 &< 0 &\quad , \tfrac{3}{2} = \tfrac{6}{4} \\
f(\tfrac{11}{8}) &= \tfrac{121}{64} - 2 &< 0 &\quad , \tfrac{3}{2} = \tfrac{12}{8} \\
f(\tfrac{23}{16}) &= \tfrac{529}{256} - 2 &> 0 &\quad , \tfrac{11}{8} = \tfrac{22}{16} \\
f(\tfrac{45}{32}) &= \tfrac{2025}{1024} - 2 &< 0 &
\end{aligned}$$

Also: $\sqrt{2} \in (\frac{45}{32}, \frac{23}{16}) = (\frac{45}{32}, \frac{46}{32}) = (1,40625\,;\,1,4375)$.

Lösungen approximieren

Die obige Methode ist sehr gut geeignet, wenn man das 2-er System zur Zahlendarstellung verwendet.

Wir verwenden aber das 10-er System. Wenn man Lösungen bis auf so-und-so-viele Stellen approximieren will, ist es sinnvoll dies auch berücksichtigen. Man sollte dann nicht immer genau zur Mitte des Intervalls gehen.

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ bis zur 1.Stelle nach dem Komma approximieren.

$$f : x \mapsto f(x) := x^2 - 2 .$$

Wir haben

$$\begin{aligned} f(1) &= -1 &< 0 \\ f(2) &= 2 &> 0 \end{aligned}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ bis zur 1.Stelle nach dem Komma approximieren.

$$f\,:\; x \mapsto f(x) := x^2 - 2\,.$$

Wir haben

$$\begin{array}{rcll} f(1) & = & -1 & < 0 \\ f(2) & = & 2 & > 0 \\ f(1,5) & = & 2,25-2 & > 0 \end{array}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ bis zur 1.Stelle nach dem Komma approximieren.

$$f:\ x \mapsto f(x) := x^2 - 2\,.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} f(1) &= -1 && < 0 \\ f(2) &= 2 && > 0 \\ f(1,5) &= 2,25 - 2 && > 0 \\ f(1,2) &= 1,44 - 2 && < 0 \end{aligned}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ bis zur 1.Stelle nach dem Komma approximieren.

$$f: \; x \mapsto f(x) := x^2 - 2 \, .$$

Wir haben

$$\begin{array}{ccccc} f(1) & = & -1 & < 0 \\ f(2) & = & 2 & > 0 \\ f(1,5) & = & 2,25 - 2 & > 0 \\ f(1,2) & = & 1,44 - 2 & < 0 \\ f(1,3) & = & 1,69 - 2 & < 0 \end{array}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ bis zur 1.Stelle nach dem Komma approximieren.

$$f:\ x \mapsto f(x) := x^2 - 2\,.$$

Wir haben

$$\begin{array}{rcrl}
f(1) & = & -1 & < 0 \\
f(2) & = & 2 & > 0 \\
f(1,5) & = & 2,25-2 & > 0 \\
f(1,2) & = & 1,44-2 & < 0 \\
f(1,3) & = & 1,69-2 & < 0 \\
f(1,4) & = & 1,96-2 & < 0
\end{array}$$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ bis zur 1.Stelle nach dem Komma approximieren.

$$f: \; x \mapsto f(x) := x^2 - 2 \, .$$

Wir haben

$$\begin{array}{rcll} f(1) & = & -1 & < 0 \\ f(2) & = & 2 & > 0 \\ f(1,5) & = & 2,25 - 2 & > 0 \\ f(1,2) & = & 1,44 - 2 & < 0 \\ f(1,3) & = & 1,69 - 2 & < 0 \\ f(1,4) & = & 1,96 - 2 & < 0 \end{array}$$

Also: $\sqrt{2} \in (1,4; 1,5)$

Lösungen approximieren

Wir wollen $\sqrt{2}$ bis zur 1.Stelle nach dem Komma approximieren.

$$f : x \mapsto f(x) := x^2 - 2 .$$

Wir haben

$$\begin{array}{rcrc} f(1) & = & -1 & < 0 \\ f(2) & = & 2 & > 0 \\ f(1,5) & = & 2,25-2 & > 0 \\ f(1,2) & = & 1,44-2 & < 0 \\ f(1,3) & = & 1,69-2 & < 0 \\ f(1,4) & = & 1,96-2 & < 0 \end{array}$$

Also: $\sqrt{2} \in (1,4;1,5)$, somit $\sqrt{2} = 1,4\ldots$.