§5 Kontinuierliches Wachstum

Kontinuierlich meßbare Größe

Wir betrachten nun eine Größe a, die man "kontinuierlich" messen kann.

Den Wert von a zum Zeitpunkt t schreiben wir nun als

$$a(t) \ .$$

Wir können jedem Zeitpunkt t den Wert $a(t)$ zuordnen.

Die möglichen Zeitpunkte beginnen dabei bei $t = 0$ und können nach oben auch beschränkt sein.

Mathematische Beschreibung

Wir fixieren ein Intervall I mit

$$I = [0, C] = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq C\}$$

oder

$$I = [0, \infty) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t\} \ .$$

Nun haben wir eine *Funktion* a, die jedem t aus I einen Wert

$$a(t)$$

zuordnet. Wir schreiben

$$a : t \mapsto a(t)$$

genauer:

$$a : I \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ \ t \mapsto a(t)$$

Das Intervall I heißt der *Definitionsbereich* der Funktion.

Zu Funktionen

Zu a haben wir den *Graphen* von a. Dieser besteht aus allen Punkten

$$(t, a(t)) \quad \text{mit } t \text{ aus } \in I$$

in der Ebene.

"$t \in I$" bedeutet: t ist aus I.

Man sagt: "t ist ein Element von I."

Zu Funktionen

- Der Graph ist eindeutig durch die Funktion gegeben und umgekehrt.
- Es kommt nicht darauf an, wie man die Funktion hinschreibt sondern nur auf diese Frage:

  Wie lautet der Funktionswert zu einem gegebenen t?
- Die Funktion muss auch nicht mit einer einzigen Formel beschrieben werden können.
- Der Definitionsbereich ist wichtig und Teil der Definition.
- Für ein $t \in I$ ist $a(t)$ eine Zahl.
- Die Funktion a ist aber keine Zahl sondern eben eine Zuordnung:

  Jedem t aus dem Definitionsbereich wird ein Wert zugeordnet. Trotzdem schreibt man oft auch $a(t)$, wenn man die Zuordnung / Funktion $a : t \mapsto a(t)$ meint.

Wachstum

Wir wählen zwei Zeitpunkte $t_1 < t_2$ im Definitionsbereich.

Wir vergleichen die Funktionswerte an diesen Zeitpunkten:

Das *additive* Wachstum von t_1 bis t_2 ist:

$$a(t_2) - a(t_1)$$

Wenn alle Funktionswerte $a(t)$ positiv sind:

Das *multiplikative* Wachstum von t_1 bis t_2,
d.h. der *Wachstumsfaktor* von t_1 bis t_2,
ist:

$$\frac{a(t_2)}{a(t_1)}$$

Kontinuierlich und diskret

Wenn wir ein Zeitintervall Δt wählen, erhalten wir eine Zeitreihe:

$$\begin{aligned} a_0 &= a(0) \\ a_1 &= a(\Delta t) \\ a_2 &= a(2 \cdot \Delta t) \\ &\vdots \\ a_n &= a(n \cdot \Delta t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

(mit Werten solange $n \cdot \Delta t$ im Definitionsbereich liegt).

Kontinuierlich und diskret

Wir können nun das additive Wachstum $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ oder die Wachstumsfaktoren $f_1, \ldots, f_n$ dieser Zeitreihe betrachten:

$$\begin{aligned} a(n \cdot \Delta t) &= a((n-1) \cdot \Delta t) + \Delta_n \\ a(n \cdot \Delta t) &= f_n \cdot a((n-1) \cdot \Delta t) \end{aligned}$$

Hier ist also

- Δ_n das additive Wachstum vom Zeitpunkt $(n-1) \cdot \Delta t$ bis zum Zeitpunkt $n \cdot \Delta t$
- f_n der Wachstumsfaktor vom Zeitpunkt $(n-1) \cdot \Delta t$ bis zum Zeitpunkt $n \cdot \Delta t$.

Lineares Wachstum

Wir interessieren uns wieder für Wachstum.

Dem arithmetischen Wachstum entspricht nun das *lineare* Wachstum:

$$a(t) = bt + c \; .$$

Die Zahl b gibt das Wachstum an: Je größer b, desto größer ist das Wachstum.

Nach unserem Sprachgebrauch. Die Zahl b kann auch negativ sein, sodass die Größe über die Zeit kleiner wird. Man sollte dann aber nicht sagen "die Größe / die Funktion wächst linear".

Lineares Wachstum

$$a(t) = bt + c \; .$$

Wir wählen wieder ein Zeitintervall Δt.

Wir können b nun so schreiben:

$$b = \frac{\Delta a}{\Delta t} \; .$$

Wir haben dann

$$a(t + \Delta t) = a(t) + \Delta a \; ,$$

und zwar unabhängig von t.

Somit: Δa ist das additive Wachstum während einer Zeit von Δt, unabhängig vom Anfangszeitpunkt.

Lineares Wachstum

$$a(t) = bt + c = \frac{\Delta a}{\Delta t} t + c$$

$$a(t + \Delta t) = a(t) + \Delta a$$

Wir haben nun

$$\begin{aligned}
a_0 &= a(0) \\
a_1 &= a(\Delta t) = a_0 + \Delta a \\
a_2 &= a(2 \cdot \Delta t) = a_0 + 2 \cdot \Delta a \\
&\vdots \\
a_n &= a(n \cdot \Delta t) = a_0 + n \cdot \Delta a \\
&\vdots
\end{aligned} \quad .$$

Lineares Wachstum

Somit: Die Zeitreihe $a_0, a_1, a_2, \ldots$ hat ein additiv konstantes Wachstum von

$$\Delta a = \Delta$$

Exponentielles Wachstum

Wir gehen nun von Folgendem aus:

Die Funktionswerte sind stets positiv und über eine Zeit von Δt beträgt der Wachstumsfaktor stets f.

Also:

$$a(t + \Delta t) = f \cdot a(t)$$

Somit:

$$a(n \cdot \Delta t) = f^n \cdot a(0)$$

Mit $t = n \cdot \Delta t$, also $n = \frac{t}{\Delta t}$:

$$a(t) = f^{\frac{t}{\Delta t}} \cdot a(0)$$

Hier sind bisher aber nur "ein paar" Werte von a gegeben.

Exponentielles Wachstum

Wir wollen die Funktion

$$a : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ \ t \mapsto a(t) := f^{\frac{t}{\Delta t}} \cdot c$$

mit positiven Konstanten $f, \Delta t$ und c betrachten.

Diese Funktion erfüllt (wenn ein paar Probleme gelöst sind):

- Der Anfangswert ist c: $a(0) = c$
- Über eine Zeit von Δt beträgt der Wachstumsfaktor stets f: $a(t + \Delta t) = f \cdot a(t)$.

Problem. Wissen wir überhaupt, was $f^{\frac{t}{\Delta t}}$ ist?

Es sei $t = r \cdot \Delta t$. Dann ist also

$$f^{\frac{t}{\Delta t}} = f^r$$

Wenn nun r eine *rationale* Zahl ist, wissen wir, was das ist.

Exponentielles Wachstum

Aber: t und r sollen beliebige reelle Zahlen sein.

Und nicht jede reelle Zahl ist rational ...

Beispiel: $\sqrt{2}$.

Was soll also f^r für eine reelle, nicht-rationale (irrationale) Zahl sein?

Was soll zum Beispiel $f^{\sqrt{2}}$ sein?

(Nicht zu verwechseln mit $f^{\frac{1}{2}} = \sqrt{f}$!)

Exponentielles Wachstum

Zur *Definition* für f^r für alle Zahlen r:

Für alle rationalen Zahlen r ist $1^r = 1$. Wir setzen $1^r := 1$ für alle r.

Es sei nun $f > 1$. Dann gilt für alle rationalen Zahlen $r_1 < r_2$:

$$f^{r_1} < f^{r_2} \ .$$

Wir wollen:

- Wenn r rational ist, ist f^r wie schon definiert.
- Für alle Zahlen $r_1 < r_2$ soll weiterhin $f^{r_1} < f^{r_2}$ gelten.

Hiermit ist f^r für alle (reellen) Zahlen r eindeutig festgelegt.
(Wie das genau geht, kommt noch.)

Exponentielles Wachstum

Es sei nun $f < 1$ (aber immer noch positiv). Dann gilt analog für alle rationalen Zahlen $r_1 < r_2$:

$$f^{r_1} > f^{r_2}$$

Wir wollen:

- Wenn r rational ist, ist f^r wie schon definiert.
- Für alle Zahlen $r_1 < r_2$ soll $f^{r_1} > f^{r_2}$ gelten.

Hiermit ist f^r wiederum für alle (reellen) Zahlen r eindeutig festgelegt.

Die üblichen Rechengesetze für das Exponentieren gelten nun weiterhin.

Exponentielles Wachstum

Wir können also die Funktion $a : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$a(t) = f^{\frac{t}{\Delta t}} \cdot c$$

betrachten.

Wir können sogar als Definitionsbereich auf ganz $\mathbb{R}$ ausweiten.

Hier heißt nun f der (konstante) *Wachstumsfaktor* in Bezug auf den Zeitraum Δt.

Wenn wir $f = 1 + g$ schreiben, ist g die (konstante) *Wachstumsrate* in Bezug auf den Zeitraum Δt.

Exponentielles Wachstum

Die Umkehrung des Exponentierens ist das Logarithmieren.

Was passiert, wenn wir den Logarithmus von

$$a(t) = f^{\frac{t}{\Delta t}} \cdot c$$

nehmen?

Zunächst wieder ein paar Grundlagen ...

Der Logarithmus

Es sei b eine feste Zahl > 1, die “Basis”.

Wenn nun $r_1 < r_2$ ist, ist $b^{r_1} < b^{r_2}$.

Außerdem wird jede positive Zahl getroffen.

Also: Zu jeder positiven Zahl c gibt es *genau eine* Zahl r mit

$$b^r = c$$

Man setzt dann

$$\log_b(c) := r \ .$$

Wir haben dann also

$$b^{\log_b(c)} = c \ .$$

Der Logarithmus

Rechenregeln. Für je zwei positive Zahlen c und d gilt:

$$\log_b(c \cdot d) = \log_b(c) + \log_b(d)$$

Denn: Dies ist äquivalent zu

$$c \cdot d = b^{\log_b(c)+\log_b(d)} \,,$$

d.h.

$$c \cdot d = b^{\log_b(c)} \cdot b^{\log_b(d)} \,.$$

Stimmt!

$$\log_b(c^e) = e \cdot \log_b(c)$$

Denn: Dies ist äquivalent zu

$$c^e = b^{e \cdot \log_b(c)} \,.$$

Der Logarithmus

Für je zwei positive Zahlen b, c gilt

$$\log_b(c) = \frac{\log_{10}(c)}{\log_{10}(b)} ,$$

wobei man die Basis 10 durch eine andere Basis ersetzen kann.

Denn:

Es gilt

$$c = b^{\log_b(c)} = 10^{\log_{10}(b) \cdot \log_b(c)}$$

und somit

$$\log_{10}(c) = \log_{10}(b) \cdot \log_b(c) .$$

Logarithmieren

Zurück zur Funktion a mit

$$a(t) = f^{\frac{t}{\Delta t}} \cdot c \ :$$

Wir wählen eine feste Basis b und schreiben

$$a(t) = b^{\log_b(f) \cdot \frac{t}{\Delta t} + \log_b(c)} \ .$$

Oder mit Logarithmieren:

$$\log_b(a(t)) = \log_b(f) \cdot \frac{t}{\Delta t} + \log_b(c) \ .$$

Wir haben nun also eine Funktion mit linearem Wachstum. Dieses Wachstum ist genau dann positiv, wenn der Wachstumsfaktor $f > 1$ ist.

Umgekehrt: Wenn man eine Funktion mit linearem Wachstum exponentiert, erhält man eine Funktion mit exponentiellem Wachstum.

Logarithmieren und Wachstum

Eine Größe wächst genau dann exponentiell, wenn ihr Logarithmus (zu irgendeiner Basis) linear wächst. Sie schrumpft genau dann exponentiell, wenn ihr Logarithmus linear fällt.

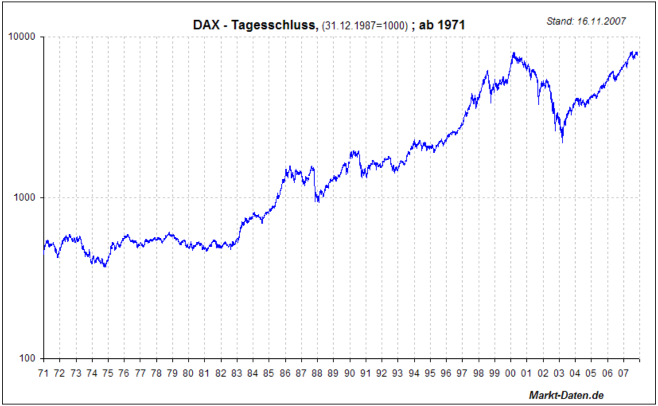
Dies gilt sowohl für diskrete als auch für kontinuierliche Größen.

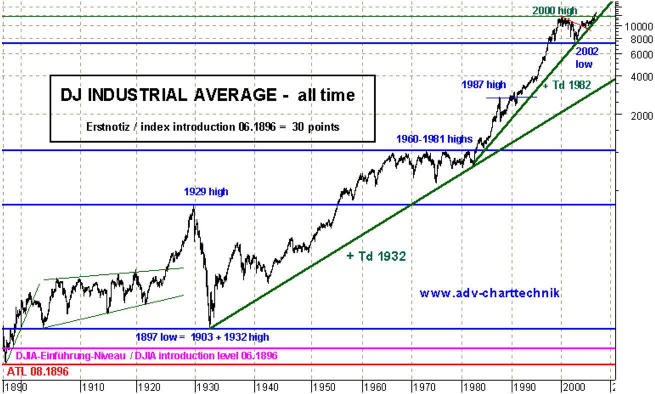
Wenn es auf das prozentuale Wachstum ankommt, benutzt man oftmals Graphen mit "logarithmischer y-Achse".

Hier gilt: Ein lineares Wachstum auf dem Bild entspricht einem exponentiellen Wachstum der zugrundeliegenden Daten.

Charts von Börsenkursen

Börsenkurse werden meist mit logarithmisch skalierter y-Achse aufgetragen.


DAX - Tagesschluss, (31.12.1987=1000) ; ab 1971
Stand: 16.11.2007
10000
1000
100
71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 00 01 02 03 04 05 06 07
Markt-Daten.de



adv - charttechnik

adv - charttechnik

Aber aufpassen, die Skala kann auch äquidistant sein:

www.finanzen.net