§3 Rechenregeln

Addition

Das Kommutativgesetz. Für je zwei Zahlen a, b gilt

$$a + b = b + a \ .$$

Addition

Das Kommutativgesetz. Für je zwei Zahlen a, b gilt

$$a + b = b + a \; .$$

Für je drei Zahlen a, b, c gilt

$$a + b + c = (a + b) + c$$

nach Definition.

Addition

Das Kommutativgesetz. Für je zwei Zahlen a, b gilt

$$a + b = b + a\ .$$

Für je drei Zahlen a, b, c gilt

$$a + b + c = (a + b) + c$$

nach Definition.

Assoziativgesetz. Für je drei Zahlen a, b, c gilt

$$(a + b) + c = a + (b + c)\ .$$

Addition und Subtraktion

$$(a + b) - b = a$$

Addition und Subtraktion

$$(a + b) - b = a$$

Spezialfall mit $a = 0$: $\quad b - b = 0$

Addition und Subtraktion

$$(a + b) - b = a$$

$$\text{Spezialfall mit } a = 0 : \quad b - b = 0$$

$$0 - a = -a$$

Addition und Subtraktion

$$(a+b)-b=a$$

Spezialfall mit $a=0$: $\quad b-b=0$

$$0-a=-a$$

$$a-b=a+(-b)$$

Addition und Subtraktion

$$(a+b)-b=a$$

Spezialfall mit $a=0$: $\quad b-b=0$

$$0-a=-a$$

$$a-b=a+(-b)$$

Spezialfall mit $a=b$: $\quad a+(-a)=0$

Addition und Subtraktion

$$(a + b) - b = a$$

Spezialfall mit $a = 0$: $\quad b - b = 0$

$$0 - a = -a$$

$$a - b = a + (-b)$$

Spezialfall mit $a = b$: $\quad a + (-a) = 0$

$$-(-a) = a$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - b + c = a + c - b \ .$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - b + c = a + c - b\ .$$

Begründung.

$$a - b + c$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - b + c = a + c - b\ .$$

Begründung.

$$\begin{aligned} & a - b + c \\ = \quad & (a + (-b)) + c \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - b + c = a + c - b\ .$$

Begründung.

$$\begin{aligned} & a - b + c \\ = \ & (a + (-b)) + c \\ = \ & a + ((-b) + c) \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - b + c = a + c - b\ .$$

Begründung.

$$\begin{aligned} & a - b + c \\ = \quad & (a + (-b)) + c \\ = \quad & a + ((-b) + c) \\ = \quad & a + (c + (-b)) \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - b + c = a + c - b \ .$$

Begründung.

$$\begin{aligned} & a - b + c \\ = \ & (a + (-b)) + c \\ = \ & a + ((-b) + c) \\ = \ & a + (c + (-b)) \\ = \ & (a + c) + (-b) \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - b + c = a + c - b\ .$$

Begründung.

$$\begin{aligned} & a - b + c \\ = \quad & (a + (-b)) + c \\ = \quad & a + ((-b) + c) \\ = \quad & a + (c + (-b)) \\ = \quad & (a + c) + (-b) \\ = \quad & a + c - b \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - (b + c) = a - b - c \ .$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - (b + c) = a - b - c \ .$$

Begründung.

$$\text{z.z.:} \quad a - (b + c) = a - b - c$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - (b + c) = a - b - c \ .$$

Begründung.

$$\begin{aligned} \text{z.z.:} \quad & a - (b + c) = a - b - c \\ \Longleftrightarrow \quad & a = (a - b - c) + (b + c) \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - (b + c) = a - b - c \; .$$

Begründung.

$$\begin{aligned}
\text{z.z.:} \quad & a - (b + c) = a - b - c \\
\iff \quad & a = (a - b - c) + (b + c) \\
\iff \quad & a = a - b + b - c + c
\end{aligned}$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - (b + c) = a - b - c \ .$$

Begründung.

$$\begin{aligned}
\text{z.z.:} \quad & a - (b + c) = a - b - c \\
\Longleftrightarrow \quad & a = (a - b - c) + (b + c) \\
\Longleftrightarrow \quad & a = a - b + b - c + c \\
\Longleftrightarrow \quad & a = a
\end{aligned}$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - (b + c) = a - b - c\ .$$

Begründung.

$$\begin{aligned}
\text{z.z.:} \quad & a - (b + c) = a - b - c \\
\Longleftrightarrow \quad & a = (a - b - c) + (b + c) \\
\Longleftrightarrow \quad & a = a - b + b - c + c \\
\Longleftrightarrow \quad & a = a
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist offensichtlich wahr, also ist die zu zeigende Aussage wahr.

Ausgehend von einer wahren Aussage kann man die gewünschte Aussage erhalten.

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - (b + c) = a - b - c\ .$$

Begründung.

$$\begin{aligned}
\text{z.z.:} \quad & a - (b + c) = a - b - c \\
\Longleftrightarrow \quad & a = (a - b - c) + (b + c) \\
\Longleftrightarrow \quad & a = a - b + b - c + c \\
\Longleftrightarrow \quad & a = a
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist offensichtlich wahr, also ist die zu zeigende Aussage wahr.

Ausgehend von einer wahren Aussage kann man die gewünschte Aussage erhalten.

Wichtig. Es ist *nur* die Richtung von unten nach oben relevant, aber die ist wirklich relevant.

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - (b + c) = a - b - c \ .$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - (b + c) = a - b - c \ .$$

Begründung, wenn man schon weiß, wie's geht.

Es gilt:

$$\begin{aligned} a &= a - b + b + c - c \\ &= a - b - c + b + c \\ &= (a - b - c) + (b + c) \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - (b + c) = a - b - c \ .$$

Begründung, wenn man schon weiß, wie's geht.

Es gilt:

$$\begin{aligned} a &= a - b + b + c - c \\ &= a - b - c + b + c \\ &= (a - b - c) + (b + c) \end{aligned}$$

Somit:

$$a - (b + c) = a - b - c$$

Addition und Subtraktion

Für drei Zahlen a, b, c haben wir auch

$$a - (b + c) = a - b - c\ .$$

Begründung, wenn man schon weiß, wie's geht.

Es gilt:

$$\begin{aligned} a &= a - b + b + c - c \\ &= a - b - c + b + c \\ &= (a - b - c) + (b + c) \end{aligned}$$

Somit:

$$a - (b + c) = a - b - c$$

Vorteil. Das Argument wird klarer.

Nachteil. Das Argument fällt ein wenig vom Himmel.

Addition und Subtraktion

Aus

$$a - (b + c) = a - b - c$$

folgt auch:

$$a - (b - c) = a - b + c = a + c - b$$

Addition und Subtraktion

Aus

$$a - (b + c) = a - b - c$$

folgt auch:

$$a - (b - c) = a - b + c = a + c - b$$

Aufpassen.

$$a - b + c \neq a - (b + c)$$

Addition und Subtraktion

Aus

$$a - (b + c) = a - b - c$$

folgt auch:

$$a - (b - c) = a - b + c = a + c - b$$

Aufpassen.

$$a - b + c \neq a - (b + c) \ ,$$

falls $c \neq 0$.

Multiplikation

Auch hier haben wir Kommutativität und Assoziativität:

Kommutativgesetz. Für je zwei Zahlen a, b gilt

$$a \cdot b = b \cdot a \ .$$

Multiplikation

Auch hier haben wir Kommutativität und Assoziativität:

Kommutativgesetz. Für je zwei Zahlen a, b gilt

$$a \cdot b = b \cdot a \ .$$

Für je drei Zahlen a, b, c haben wir wiederum nach Definition

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c \ .$$

Assoziativgesetz. Für je drei Zahlen a, b, c gilt

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \ .$$

Multiplikation und Division

Für Multiplikation und Division gelten analoge Gesetze wie für Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned}(a+b)-b &= a\\ (a\cdot b)/b &= a\end{aligned}$$

Multiplikation und Division

Für Multiplikation und Division gelten analoge Gesetze wie für Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned} (a+b)-b &= a \\ (a \cdot b)/b &= a \qquad (b \neq 0) \end{aligned}$$

Multiplikation und Division

Für Multiplikation und Division gelten analoge Gesetze wie für Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned} (a+b)-b &= a \\ (a \cdot b)/b &= a \qquad (b \neq 0) \end{aligned}$$

Spezialfall:

$$\begin{aligned} a = 0: \quad b - b &= 0 \\ a = 1: \quad b/b &= 1 \qquad (b \neq 0) \end{aligned}$$

Multiplikation und Division

Für Multiplikation und Division gelten analoge Gesetze wie für Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned} (a+b)-b &= a \\ (a\cdot b)/b &= a \qquad (b \neq 0) \end{aligned}$$

Spezialfall:

$$\begin{aligned} a=0: \qquad b-b &= 0 \\ a=1: \qquad b/b &= 1 \qquad (b \neq 0) \end{aligned}$$

$$0-a = -a$$

Multiplikation und Division

Für Multiplikation und Division gelten analoge Gesetze wie für Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned} (a+b)-b &= a \\ (a\cdot b)/b &= a \qquad (b \neq 0) \end{aligned}$$

Spezialfall: $a = 0: \quad b - b = 0$

$a = 1: \quad b/b = 1 \qquad (b \neq 0)$

$$\begin{aligned} 0 - a &= -a \\ 1/a &= \end{aligned}$$

Multiplikation und Division

Für Multiplikation und Division gelten analoge Gesetze wie für Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned}(a+b)-b &= a\\ (a\cdot b)/b &= a \qquad (b\neq 0)\end{aligned}$$

Spezialfall: $a=0:\quad b-b = 0$

$a=1:\quad b/b = 1 \qquad (b\neq 0)$

$$\begin{aligned}0-a &= -a\\ 1/a &= 1/a\end{aligned}$$

Multiplikation und Division

Für Multiplikation und Division gelten analoge Gesetze wie für Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned} (a+b)-b &= a \\ (a \cdot b)/b &= a \qquad (b \neq 0) \end{aligned}$$

Spezialfall: $a = 0: \quad b - b = 0$

$a = 1: \quad b/b = 1 \qquad (b \neq 0)$

$$\begin{aligned} 0 - a &= -a \\ 1/a &= 1/a \quad (= a^{-1}) \end{aligned}$$

Multiplikation und Division

Für Multiplikation und Division gelten analoge Gesetze wie für Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned} (a+b)-b &= a \\ (a\cdot b)/b &= a \qquad (b \neq 0) \end{aligned}$$

$$\text{Spezialfall:} \qquad \begin{aligned} a=0: \qquad b-b &= 0 \\ a=1: \qquad b/b &= 1 \qquad (b \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0-a &= -a \\ 1/a &= 1/a \quad (= a^{-1}) \quad ? \end{aligned}$$

Multiplikation und Division

$$\begin{aligned} a - b &= a + (-b) \\ a/b &= a \cdot (1/b) \qquad (b \neq 0) \end{aligned}$$

Multiplikation und Division

$$\begin{aligned} a - b &= a + (-b) \\ a/b &= a \cdot (1/b) \qquad (b \neq 0) \end{aligned}$$

Spezialfall mit $a = b$:

$$\begin{aligned} a + (-a) &= 0 \\ a \cdot (1/a) &= 1 \qquad (a \neq 0) \end{aligned}$$

Multiplikation und Division

$$a - b = a + (-b)$$

$$a/b = a \cdot (1/b) \qquad (b \neq 0)$$

Spezialfall mit $a = b$:

$$a + (-a) = 0$$

$$a \cdot (1/a) = 1 \qquad (a \neq 0)$$

$$-(-a) = a$$

$$1/(1/a) = a \qquad (a \neq 0)$$

Multiplikation und Division

$$\begin{aligned} a - b &= a + (-b) \\ a/b &= a \cdot (1/b) \qquad (b \neq 0) \end{aligned}$$

Spezialfall mit $a = b$:

$$\begin{aligned} a + (-a) &= 0 \\ a \cdot (1/a) &= 1 \qquad (a \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(-a) &= a \\ 1/(1/a) &= a \qquad (a \neq 0) \end{aligned}$$

Somit: $1/a$ übernimmt die Rolle von $-a$.

Multiplikation und Division

$$
\begin{aligned}
(a-b)+c &= (a+c)-b \\
(a/b)\cdot c &= (a\cdot c)/b \qquad\qquad (b\neq 0)
\end{aligned}
$$

Multiplikation und Division

$$
\begin{aligned}
(a-b)+c &= (a+c)-b \\
(a/b)\cdot c &= (a\cdot c)/b \qquad (b \neq 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a-(b+c) &= (a-b)-c \qquad (b, c \neq 0) \\
a/(b\cdot c) &= (a/b)/c \qquad (b, c \neq 0)
\end{aligned}
$$

Multiplikation und Division

$$
\begin{aligned}
(a-b)+c &= (a+c)-b \\
(a/b)\cdot c &= (a\cdot c)/b \qquad (b\neq 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a-(b+c) &= (a-b)-c \qquad (b,c\neq 0) \\
a/(b\cdot c) &= (a/b)/c \qquad (b,c\neq 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a-(b-c) &= (a-b)+c = (a+c)-b = a+(c-b) \\
a/(b/c) &= (a/b)\cdot c = (a\cdot c)/b = a\cdot(c/b) \\
& \qquad (b,c\neq 0)
\end{aligned}
$$

Multiplikation und Division

Dasselbe in Bruchschreibweise:

$$\begin{aligned} a/b &= a \cdot (1/b) && (b \neq 0) \\ \frac{a}{b} &= a \cdot \frac{1}{b} && (b \neq 0) \end{aligned}$$

Multiplikation und Division

Dasselbe in Bruchschreibweise:

$$
\begin{aligned}
a/b &= a \cdot (1/b) && (b \neq 0) \\
\frac{a}{b} &= a \cdot \frac{1}{b} && (b \neq 0) \\
\\
(a/b) \cdot c &= (a \cdot c)/b && (b \neq 0) \\
\frac{a}{b} \cdot c &= \frac{ac}{b} && (b \neq 0)
\end{aligned}
$$

Multiplikation und Division

Dasselbe in Bruchschreibweise:

$$\begin{aligned}
a/b &= a\cdot(1/b) && (b\neq 0)\\
\frac{a}{b} &= a\cdot\frac{1}{b} && (b\neq 0)\\[2em]
(a/b)\cdot c &= (a\cdot c)/b && (b\neq 0)\\
\frac{a}{b}\cdot c &= \frac{ac}{b} && (b\neq 0)\\[2em]
a/(b\cdot c) &= (a/b)/c && (b,c\neq 0)\\
\frac{a}{bc} &= \frac{\frac{a}{b}}{c} && (b,c\neq 0)
\end{aligned}$$

Multiplikation und Division

Dasselbe in Bruchschreibweise:

$$
\begin{aligned}
a/b &= a\cdot(1/b) && (b\neq 0)\\
\frac{a}{b} &= a\cdot\frac{1}{b} && (b\neq 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a/b)\cdot c &= (a\cdot c)/b && (b\neq 0)\\
\frac{a}{b}\cdot c &= \frac{ac}{b} && (b\neq 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a/(b\cdot c) &= (a/b)/c && (b,c\neq 0)\\
\frac{a}{bc} &= \frac{\frac{a}{b}}{c} && (b,c\neq 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a/(b/c) &= (a/b)\cdot c = (a\cdot c)/b = a\cdot(c/b) && (b,c\neq 0)\\
\frac{a}{\frac{b}{c}} &= \frac{a}{b}\cdot c = \frac{ac}{b} = a\frac{c}{b} && (b,c\neq 0)
\end{aligned}
$$

Multiplikation und Division

Somit:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Multiplikation und Division

Somit:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Kurz: Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert multipliziert.

Distributitität

Distributivgesetz. Für je drei Zahlen a, b, c gilt

$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

oder auch

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \ .$$

Distributitität

Distributivgesetz. Für je drei Zahlen a, b, c gilt

$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

oder auch

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \; .$$

Auch mit Division:

$$(a + b)/c = a/c + b/c \; ,$$

d.h.

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

für $c \neq 0$.

Beispiel

$$\frac{1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{2}} =$$

Beispiel

$$\frac{1-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{6-4-1}{6}}{\frac{2+5}{10}} =$$

Beispiel

$$\frac{1-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{6-4-1}{6}}{\frac{2+5}{10}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{10}} =$$

Beispiel

$$\frac{1-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{6-4-1}{6}}{\frac{2+5}{10}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{10}} = \frac{10}{42} =$$

Beispiel

$$\frac{1-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{6-4-1}{6}}{\frac{2+5}{10}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{10}} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$$

Multiplizieren und Potenzieren

Für eine Zahl a und eine natürliche Zahl $n \geq 1$ (d.h. $n = 1, 2, \ldots$) setzen wir

$$a^n := \overbrace{a \quad \cdots \quad a}^{n \text{ mal}} \, .$$

Multiplizieren und Potenzieren

Für eine Zahl a und eine natürliche Zahl $n \geq 1$ (d.h. $n = 1, 2, \ldots$) setzen wir

$$a^n := \overbrace{a \quad \cdots \quad a}^{n \text{ mal}} .$$

Außerdem $a^0 := 1$. (Außer vielleicht für $a = 0$ ...)

Multiplizieren und Potenzieren

Für eine Zahl a und eine natürliche Zahl $n \geq 1$ (d.h. $n = 1, 2, \ldots$) setzen wir

$$a^n := \overbrace{a \quad \cdots \quad a}^{n \text{ mal}} .$$

Außerdem $a^0 := 1$. (Außer vielleicht für $a = 0$ ...)

Wenn a nicht 0 ist:

$$a^{-n} := \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

Also insbesondere: $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Multiplizieren und Potenzieren

Für eine Zahl a und eine natürliche Zahl $n \geq 1$ (d.h. $n = 1, 2, \ldots$) setzen wir

$$a^n := \overbrace{a \quad \cdots \quad a}^{n \text{ mal}} .$$

Außerdem $a^0 := 1$. (Außer vielleicht für $a = 0$ ...)

Wenn a nicht 0 ist:

$$a^{-n} := \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

Also insbesondere: $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \frac{1}{a^2} \arrow[r, bend left, "\cdot a"] & \frac{1}{a} \arrow[l, bend left, "\cdot \frac{1}{a}"] \arrow[r, bend left, "\cdot a"] & 1 \arrow[l, bend left, "\cdot \frac{1}{a}"] \arrow[r, bend left, "\cdot a"] & a \arrow[l, bend left, "\cdot \frac{1}{a}"] \arrow[r, bend left, "\cdot a"] & a^2 \arrow[l, bend left, "\cdot \frac{1}{a}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Multiplizieren und Potenzieren

Wir haben für zwei natürliche Zahlen m, n:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$a^{mn} = (a^m)^n$$

Multiplizieren und Potenzieren

Wir haben für zwei natürliche Zahlen m, n:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$a^{mn} = (a^m)^n$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Multiplizieren und Potenzieren

Wir haben für zwei natürliche Zahlen m, n:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$a^{mn} = (a^m)^n$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Vergleiche das mit:

$$(a+b) \cdot c = ac + bc$$

Multiplizieren und Potenzieren

Es sei nun a eine positive Zahl. Wir wollen a noch eine rationale Zahl q nehmen:

$$a^q = ?$$

Multiplizieren und Potenzieren

Es sei nun a eine positive Zahl. Wir wollen a noch eine rationale Zahl q nehmen:

$$a^q = ?$$

Wir setzen voraus: Zu jeder positiven Zahl u gibt es genau eine positive Zahl v mit $v^n = u$. Diese Zahl v bezeichnen wir mit

$$\sqrt[n]{u}\ .$$

Multiplizieren und Potenzieren

Es sei nun a eine positive Zahl. Wir wollen a noch eine rationale Zahl q nehmen:

$$a^q = ?$$

Wir setzen voraus: Zu jeder positiven Zahl u gibt es genau eine positive Zahl v mit $v^n = u$. Diese Zahl v bezeichnen wir mit

$$\sqrt[n]{u}\ .$$

Wir schreiben $q = \frac{z}{n}$ mit einer ganzen Zahl z und einer natürlichen Zahl n und setzen

$$a^q := \sqrt[n]{a^z}\ .$$

Multiplizieren und Potenzieren

Wir haben nun für zwei rationale Zahlen q, r:

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r$$

$$a^{qr} = (a^q)^r$$

Multiplizieren und Potenzieren

Wir haben nun für zwei rationale Zahlen q, r:

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r$$

$$a^{qr} = (a^q)^r$$

$$(ab)^q = a^q \cdot b^q$$

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Äquivalenzumformungen.

Wir benutzen einen gemeinsamen Nenner (=Hauptnenner) für q, r.
Also:

$$q = \frac{z}{n} \quad , \quad r = \frac{w}{n}$$

mit eine natürlichen Zahl n und ganzen Zahlen z, w.

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Äquivalenzumformungen.

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Äquivalenzumformungen.

$(q = \frac{z}{n}, r = \frac{w}{n})$ z.z.: $a^{q+r} = a^q \cdot a^r$

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von
$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Äquivalenzumformungen.

$$\left(q = \tfrac{z}{n}, r = \tfrac{w}{n}\right) \qquad \begin{aligned} &\text{z.z.:} && a^{q+r} = a^q \cdot a^r \\ &\iff && a^{\frac{z}{n}+\frac{w}{n}} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}} \end{aligned}$$

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Äquivalenzumformungen.

$$\left(q = \tfrac{z}{n}, r = \tfrac{w}{n}\right) \qquad \begin{aligned} \text{z.z.:} \quad & a^{q+r} = a^q \cdot a^r \\ \iff \quad & a^{\frac{z}{n}+\frac{w}{n}} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}} \\ \iff \quad & a^{\frac{z+w}{n}} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}} \end{aligned}$$

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Äquivalenzumformungen.

$$\left(q = \tfrac{z}{n}, r = \tfrac{w}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{z.z.:} \quad & a^{q+r} = a^q \cdot a^r \\
\iff \quad & a^{\frac{z}{n}+\frac{w}{n}} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}} \\
\iff \quad & a^{\frac{z+w}{n}} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}} \\
\iff \quad & \sqrt[n]{a^{z+w}} = \sqrt[n]{a^z} \cdot \sqrt[n]{a^w}
\end{aligned}$$

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Äquivalenzumformungen.

$$\left(q = \tfrac{z}{n}, r = \tfrac{w}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{z.z.:} \quad & a^{q+r} = a^q \cdot a^r \\
\iff \quad & a^{\frac{z}{n}+\frac{w}{n}} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}} \\
\iff \quad & a^{\frac{z+w}{n}} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}} \\
\iff \quad & \sqrt[n]{a^{z+w}} = \sqrt[n]{a^z} \cdot \sqrt[n]{a^w} \\
\iff \quad & a^{z+w} = a^z \cdot a^w
\end{aligned}$$

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von
$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Äquivalenzumformungen.

$(q = \frac{z}{n}, r = \frac{w}{n})$

$$\begin{aligned} \text{z.z.:} \quad & a^{q+r} = a^q \cdot a^r \\ \iff \quad & a^{\frac{z}{n}+\frac{w}{n}} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}} \\ \iff \quad & a^{\frac{z+w}{n}} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}} \\ \iff \quad & \sqrt[n]{a^{z+w}} = \sqrt[n]{a^z} \cdot \sqrt[n]{a^w} \\ \iff \quad & a^{z+w} = a^z \cdot a^w \qquad [\mathrm{w}] \end{aligned}$$

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Äquivalenzumformungen.

$\left(q = \frac{z}{n}, r = \frac{w}{n}\right)$

$$\begin{aligned}
\text{z.z.:} \quad & a^{q+r} = a^q \cdot a^r \\
\iff \quad & a^{\frac{z}{n}+\frac{w}{n}} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}} \\
\iff \quad & a^{\frac{z+w}{n}} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}} \\
\iff \quad & \sqrt[n]{a^{z+w}} = \sqrt[n]{a^z} \cdot \sqrt[n]{a^w} \\
\overset{(*)}{\iff} \quad & a^{z+w} = a^z \cdot a^w \qquad [\mathrm{w}]
\end{aligned}$$

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Äquivalenzumformungen.

$(q = \frac{z}{n}, r = \frac{w}{n})$	z.z.: $\quad a^{q+r} = a^q \cdot a^r$
	$\iff \quad a^{\frac{z}{n}+\frac{w}{n}} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}}$
((∗) Für $u, v > 0$ und	$\iff \quad a^{\frac{z+w}{n}} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}}$
$n > 1$ nat. Zahl gilt:	$\iff \quad \sqrt[n]{a^{z+w}} = \sqrt[n]{a^z} \cdot \sqrt[n]{a^w}$
$u = v \iff u^n = v^n$)	$\overset{(*)}{\iff} \quad a^{z+w} = a^z \cdot a^w \qquad$ [w]

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von
$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Gleichungskette.

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von
$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Gleichungskette.

Wiederum: $q = \frac{z}{n}$, $r = \frac{w}{n}$.

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Gleichungskette.

Wiederum: $q = \frac{z}{n}$, $r = \frac{w}{n}$.

Wir haben: $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad & a^{q+r} = a^{\frac{z}{n}+\frac{w}{n}} = a^{\frac{z+w}{n}} = \sqrt[n]{a^{z+w}} \\ = \quad & \sqrt[n]{a^z \cdot a^w} \overset{(*)}{=} \sqrt[n]{a^z} \cdot \sqrt[n]{a^w} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}} \\ = \quad & a^r \cdot a^q \end{aligned}$$

Multiplizieren und Potenzieren

Begründung von

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r \quad :$$

Begründung mit Gleichungskette.

Wiederum: $q = \frac{z}{n}$, $r = \frac{w}{n}$.

Wir haben: $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad & a^{q+r} = a^{\frac{z}{n}+\frac{w}{n}} = a^{\frac{z+w}{n}} = \sqrt[n]{a^{z+w}} \\ = \quad & \sqrt[n]{a^z \cdot a^w} \overset{(*)}{=} \sqrt[n]{a^z} \cdot \sqrt[n]{a^w} = a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{w}{n}} \\ = \quad & a^r \cdot a^q \end{aligned}$$

Aufpassen. Jede einzelne Gleichung in so einer Begründung sollte für sich genommen "vollkommen klar" sein.

§4 Wachstum

Zwei Arten der Beschreibung von Wachstum

Wenn wir von *Wachstum* reden, vergleichen wir in der Regel die Werte einer Größe zu verschiedenen Zeitpunkten oder Zeiträumen

Zwei Arten der Beschreibung von Wachstum

Wenn wir von *Wachstum* reden, vergleichen wir in der Regel die Werte einer Größe zu verschiedenen Zeitpunkten oder Zeiträumen (Perioden).

Zwei Arten der Beschreibung von Wachstum

Wenn wir von *Wachstum* reden, vergleichen wir in der Regel die Werte einer Größe zu verschiedenen Zeitpunkten oder Zeiträumen (Perioden).

Wir können

- die *Differenz* zwischen den Werten der Größe zu unterschiedlichen Zeiträumen betrachten,
- betrachten, um welchen *Faktor* die Größe gewachsen ist.

Somit können wir einer *additiven* und einer *multiplikativen* Beschreibung reden.

Zwei Arten der Beschreibung von Wachstum

Beispiel für additive Beschreibung:

“Der Umsatz unserer Firma ist im vom vorletzten auf das letzte Jahr um 100.000€ gestiegen.”

Zwei Arten der Beschreibung von Wachstum

Beispiel für multiplikative Beschreibung:

Das Folgende sagt alles dasselbe aus:

- “Der Umsatz unserer Firma ist vom vorletzten auf das letzte Jahr um 20% gestiegen.”
- “Der Umsatz unserer Firma ist vom vorletzten auf das letzte Jahr um $\frac{1}{5}$ gestiegen.”
- “Der Umsatz unserer Firma ist vom vorletzten auf das letzte Jahr um einen Faktor von $1,2$ gestiegen.”

Zwei Arten der Beschreibung von Wachstum

Beispiel für multiplikative Beschreibung:

Das Folgende sagt alles dasselbe aus:

- "Der Umsatz unserer Firma ist vom vorletzten auf das letzte Jahr um 20% gestiegen."
- "Der Umsatz unserer Firma ist vom vorletzten auf das letzte Jahr um $\frac{1}{5}$ gestiegen."
- "Der Umsatz unserer Firma ist vom vorletzten auf das letzte Jahr um einen Faktor von $1,2$ gestiegen."

Hier ist die *Wachstumsrate* gleich $\frac{1}{5} = 20\%$ und der *Wachstumsfaktor* gleich $1,2$.

Zwei Arten der Beschreibung von Wachstum

Beispiel für multiplikative Beschreibung:

Das Folgende sagt alles dasselbe aus:

- “Der Umsatz unserer Firma ist vom vorletzten auf das letzte Jahr um 20% gestiegen.”
- “Der Umsatz unserer Firma ist vom vorletzten auf das letzte Jahr um $\frac{1}{5}$ gestiegen.”
- “Der Umsatz unserer Firma ist vom vorletzten auf das letzte Jahr um einen Faktor von $1,2$ gestiegen.”

Hier ist die *Wachstumsrate* gleich $\frac{1}{5} = 20\%$ und der *Wachstumsfaktor* gleich $1,2$.

Übrigens. $x\% = \frac{1}{100}x$.

Zwei Arten der Beschreibung von Wachstum

Wir wollen Wachstum für mehrere Zeitpunkte oder über mehrere Perioden betrachten.

Wir betrachten zum Beispiel

- die (momentane) Geschwindigkeit eines Objektes, gemessen alle Stunde einmal (Zeitpunkte),
- den Umsatz einer Firma in darauffolgenden Jahren (Perioden).

Zwei Arten der Beschreibung von Wachstum

Wir wollen Wachstum für mehrere Zeitpunkte oder über mehrere Perioden betrachten.

Wir betrachten zum Beispiel

- die (momentane) Geschwindigkeit eines Objektes, gemessen alle Stunde einmal (Zeitpunkte),
- den Umsatz einer Firma in darauffolgenden Jahren (Perioden).

Wir können die Zeitpunkte / Perioden durchnummerieren. Wir beginnen dabei bei 0. Wir erhalten eine *Zeitreihe*. Diese kann man z.B. so schreiben:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \ .$$

Hier ist a_i der Wert der Größe zum Zeitpunkt i.

Zwei Arten der Beschreibung von Wachstum

Wir wollen Wachstum für mehrere Zeitpunkte oder über mehrere Perioden betrachten.

Wir betrachten zum Beispiel

- die (momentane) Geschwindigkeit eines Objektes, gemessen alle Stunde einmal (Zeitpunkte),
- den Umsatz einer Firma in darauffolgenden Jahren (Perioden).

Wir können die Zeitpunkte / Perioden durchnummerieren. Wir beginnen dabei bei 0. Wir erhalten eine *Zeitreihe*. Diese kann man z.B. so schreiben:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \ .$$

Hier ist a_i der Wert der Größe zum Zeitpunkt i. Das heißt: a_0 ist der Wert zum Ausgangszeitpunkt / zur Ausgangsperiode.

Additiv konstantes Wachstum

Beispiel. Der Umsatz einer Firma in einem bestimmten Jahr 1 mio €. Der Umsatz der Firma wächst konstant mit 100.000€ pro Jahr (was natürlich nur über für einem bestimmten Zeitraum realistisch ist, aber das beachten wir jetzt nicht ...).

Der Umsatz beträgt nun im Ausgangsjahr 1 mio €, im ersten Jahr nach dem Ausgangsjahr 1.100.000€, im zweiten Jahr nach dem Ausgangsjahr 1.200.000€ ...

Additiv konstantes Wachstum

Wir bezeichnen den Umsatz im $n$ten Jahr *nach* dem Ausgangsjahr mit $U_n \quad (n \geq 0)$.

Additiv konstantes Wachstum

Wir bezeichnen den Umsatz im $n$ten Jahr *nach* dem Ausgangsjahr mit $U_n \quad (n \geq 0)$. Somit ist

$$U_0 = 1.000.000€$$

Additiv konstantes Wachstum

Wir bezeichnen den Umsatz im *n*ten Jahr *nach* dem Ausgangsjahr mit $U_n \quad (n \geq 0)$. Somit ist

$$\begin{aligned} U_0 &= 1.000.000€ \\ U_1 &= 1.100.000€ \end{aligned}$$

Additiv konstantes Wachstum

Wir bezeichnen den Umsatz im $n$ten Jahr *nach* dem Ausgangsjahr mit $U_n \quad (n \geq 0)$. Somit ist

$$\begin{aligned} U_0 &= 1.000.000€ \\ U_1 &= 1.100.000€ \\ U_2 &= 1.200.000€ \end{aligned}$$

Additiv konstantes Wachstum

Wir bezeichnen den Umsatz im *n*ten Jahr *nach* dem Ausgangsjahr mit $U_n \quad (n \geq 0)$. Somit ist

$$\begin{aligned} U_0 &= 1.000.000€ \\ U_1 &= 1.100.000€ \\ U_2 &= 1.200.000€ \\ &\vdots \end{aligned}$$

Additiv konstantes Wachstum

Wir bezeichnen den Umsatz im $n$ten Jahr *nach* dem Ausgangsjahr mit $U_n \quad (n \geq 0)$. Somit ist

$$\begin{aligned}
U_0 &= 1.000.000€ \\
U_1 &= 1.100.000€ \\
U_2 &= 1.200.000€ \\
\vdots & \qquad \vdots \\
U_n &= U_{n-1} + 100.000€
\end{aligned}$$

Additiv konstantes Wachstum

Wir bezeichnen den Umsatz im $n$ten Jahr *nach* dem Ausgangsjahr mit $U_n \quad (n \geq 0)$. Somit ist

$$
\begin{aligned}
U_0 &= 1.000.000€ \\
U_1 &= 1.100.000€ \\
U_2 &= 1.200.000€ \\
&\vdots \\
U_n &= U_{n-1} + 100.000€ \\
U_n &= 1.000.000€ + n \cdot 100.000€
\end{aligned}
$$

Multiplikativ konstantes Wachstum

Beispiel. Der Umsatz einer Firma beträgt in einem bestimmten Jahr 1 mio €. Der Umsatz der Firma wächst konstant mit 10% pro Jahr.

Multiplikativ konstantes Wachstum

Beispiel. Der Umsatz einer Firma beträgt in einem bestimmten Jahr 1 mio €. Der Umsatz der Firma wächst konstant mit 10% pro Jahr.

Hier wächst der Umsatz mit einem Faktor von $1,1$. Es ist:

Multiplikativ konstantes Wachstum

Beispiel. Der Umsatz einer Firma beträgt in einem bestimmten Jahr 1 mio €. Der Umsatz der Firma wächst konstant mit 10% pro Jahr.

Hier wächst der Umsatz mit einem Faktor von $1,1$. Es ist:

$$U_0 = 1.000.000€$$

Multiplikativ konstantes Wachstum

Beispiel. Der Umsatz einer Firma beträgt in einem bestimmten Jahr 1 mio €. Der Umsatz der Firma wächst konstant mit 10% pro Jahr.

Hier wächst der Umsatz mit einem Faktor von $1,1$. Es ist:

$$\begin{aligned} U_0 &= 1.000.000€ \\ U_1 &= 1.100.000€ \end{aligned}$$

Multiplikativ konstantes Wachstum

Beispiel. Der Umsatz einer Firma beträgt in einem bestimmten Jahr 1 mio €. Der Umsatz der Firma wächst konstant mit 10% pro Jahr.

Hier wächst der Umsatz mit einem Faktor von $1,1$. Es ist:

$$\begin{aligned} U_0 &= 1.000.000€ \\ U_1 &= 1.100.000€ \\ U_2 &= 1.210.000€ \end{aligned}$$

Multiplikativ konstantes Wachstum

Beispiel. Der Umsatz einer Firma beträgt in einem bestimmten Jahr 1 mio €. Der Umsatz der Firma wächst konstant mit 10% pro Jahr.

Hier wächst der Umsatz mit einem Faktor von $1,1$. Es ist:

$$\begin{aligned} U_0 &= 1.000.000€ \\ U_1 &= 1.100.000€ \\ U_2 &= 1.210.000€ \\ U_3 &= 1.331.000€ \end{aligned}$$

Multiplikativ konstantes Wachstum

Beispiel. Der Umsatz einer Firma beträgt in einem bestimmten Jahr 1 mio €. Der Umsatz der Firma wächst konstant mit 10% pro Jahr.

Hier wächst der Umsatz mit einem Faktor von $1,1$. Es ist:

$$\begin{aligned}
U_0 &= 1.000.000€ \\
U_1 &= 1.100.000€ \\
U_2 &= 1.210.000€ \\
U_3 &= 1.331.000€ \\
\vdots & \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Multiplikativ konstantes Wachstum

Beispiel. Der Umsatz einer Firma beträgt in einem bestimmten Jahr 1 mio €. Der Umsatz der Firma wächst konstant mit 10% pro Jahr.

Hier wächst der Umsatz mit einem Faktor von $1,1$. Es ist:

$$\begin{aligned}
U_0 &= 1.000.000€ \\
U_1 &= 1.100.000€ \\
U_2 &= 1.210.000€ \\
U_3 &= 1.331.000€ \\
&\vdots \\
U_n &= 1,1 \cdot U_{n-1}
\end{aligned}$$

Multiplikativ konstantes Wachstum

Beispiel. Der Umsatz einer Firma beträgt in einem bestimmten Jahr 1 mio €. Der Umsatz der Firma wächst konstant mit 10% pro Jahr.

Hier wächst der Umsatz mit einem Faktor von $1,1$. Es ist:

$$
\begin{aligned}
U_0 &= 1.000.000€ \\
U_1 &= 1.100.000€ \\
U_2 &= 1.210.000€ \\
U_3 &= 1.331.000€ \\
\vdots & \qquad \vdots \\
U_n &= 1,1 \cdot U_{n-1} \\
U_n &= 1,1^n \cdot 1.000.000€
\end{aligned}
$$

Begriff

Wenn eine Größe über mehrere Zeiträume konstanter Länge hinweg additiv konstant wächst, spricht man von *arithmetischem Wachstum*.

Begriff

Wenn eine Größe über mehrere Zeiträume konstanter Länge hinweg additiv konstant wächst, spricht man von *arithmetischem Wachstum*.

Wenn eine Größe über mehrere Zeiträume konstanter Länge hinweg multiplikativ konstant wächst, spricht man von *geometrischem Wachstum* oder von *exponentiellem Wachstum*.

Begriff

Wenn eine Größe über mehrere Zeiträume konstanter Länge hinweg additiv konstant wächst, spricht man von *arithmetischem Wachstum*.

Wenn eine Größe über mehrere Zeiträume konstanter Länge hinweg multiplikativ konstant wächst, spricht man von *geometrischem Wachstum* oder von *exponentiellem Wachstum*.

Somit wächst der Umsatz im ersten Beispiel in arithmetischer Weise, im zweitem Beispiel in geometrischer Weise. Oder kurz: Er wächst exponentiell.

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Der Umsatz einer Firma beträgt über 6 Jahre hinweg:

Ausgangsjahr	1.430.000 €
1. Folgejahr	1.520.000 €
2. Folgejahr	1.604.000 €
3. Folgejahr	1.300.000 €
4. Folgejahr	2.021.000 €
5. Folgejahr	2.230.000 €

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Der Umsatz einer Firma beträgt über 6 Jahre hinweg:

Ausgangsjahr	1.430.000 €
1. Folgejahr	1.520.000 €
2. Folgejahr	1.604.000 €
3. Folgejahr	1.300.000 €
4. Folgejahr	2.021.000 €
5. Folgejahr	2.230.000 €

1. Um wieviel Euro ist der Umsatz der Firma im Durchschnitt pro Jahr gewachsen?
2. Um welchen Faktor ist der Umsatz der Firma im Durchschnitt pro Jahr gewachsen?
3. Um wieviel Prozent ist der Umsatz der Firma im Durchschnitt pro Jahr gewachsen?

Durchschnittliches Wachstum

Um wieviel Euro ist der Umsatz der Firma im Durchschnitt pro Jahr gewachsen?

Durchschnittliches Wachstum

Um wieviel Euro ist der Umsatz der Firma im Durchschnitt pro Jahr gewachsen?

Gesucht ist ein Geldbetrag Δ (in Euro), für den gilt:

Durchschnittliches Wachstum

Um wieviel Euro ist der Umsatz der Firma im Durchschnitt pro Jahr gewachsen?

Gesucht ist ein Geldbetrag Δ (in Euro), für den gilt:

Wenn der Umsatz ausgehend vom Umsatz im Ausgangsjahr jedes Jahr um den Betrag Δ gewachsen wäre, hätte sich derselbe Umsatz im Endjahr ($=$ 5. Folgejahr) ergeben.

Durchschnittliches Wachstum

	Umsatz	hyothetischer Umsatz bei additiv konstantem Wachstum
Ausgangsjahr	1.430.000 €	1.430.000 €
1. Folgejahr	1.520.000 €	1.430.000 €$+\Delta$
2. Folgejahr	1.604.000 €	1.430.000 €$+2\Delta$
3. Folgejahr	1.300.000 €	1.430.000 €$+3\Delta$
4. Folgejahr	2.021.000 €	1.430.000 €$+4\Delta$
5. Folgejahr	2.230.000 €	$\overset{!}{=}$ 1.430.000 €$+5\Delta$

Durchschnittliches Wachstum

	Umsatz	hyothetischer Umsatz bei additiv konstantem Wachstum
Ausgangsjahr	1.430.000 €	1.430.000 €
1. Folgejahr	1.520.000 €	1.430.000 €$+\Delta$
2. Folgejahr	1.604.000 €	1.430.000 €$+2\Delta$
3. Folgejahr	1.300.000 €	1.430.000 €$+3\Delta$
4. Folgejahr	2.021.000 €	1.430.000 €$+4\Delta$
5. Folgejahr	2.230.000 €	$\overset{!}{=}$ 1.430.000 €$+5\Delta$

Also: $\Delta = (2.230.000€ - 1.430.000€)/5 = 160.000€$.

Durchschnittliches Wachstum

	Umsatz	hyothetischer Umsatz bei additiv konstantem Wachstum
Ausgangsjahr	1.430.000 €	1.430.000 €
1. Folgejahr	1.520.000 €	$1.430.000$ €$+\Delta = 1.590.000$ €
2. Folgejahr	1.604.000 €	$1.430.000$ €$+2\Delta = 1.750.000$ €
3. Folgejahr	1.300.000 €	$1.430.000$ €$+3\Delta = 1.910.000$ €
4. Folgejahr	2.021.000 €	$1.430.000$ €$+4\Delta = 2.070.000$ €
5. Folgejahr	2.230.000 €	$\stackrel{!}{=} 1.430.000$ €$+5\Delta = 2.230.000$ €

Also: $\Delta = (2.230.000€ - 1.430.000€)/5 = 160.000€$.

Durchschnittliches Wachstum

Frage. Um welchen Faktor ist der Umsatz der Firma im Durchschnitt pro Jahr gewachsen?

Durchschnittliches Wachstum

Frage. Um welchen Faktor ist der Umsatz der Firma im Durchschnitt pro Jahr gewachsen?

Gesucht ist die Zahl f, für die gilt:

Wenn der Umsatz ausgehend vom Umsatz im Ausgangsjahr jedes Jahr um den Faktor f gewachsen wäre, hätte sich derselbe Umsatz im Endjahr (=5. Folgejahr) ergeben.

Durchschnittliches Wachstum

	Umsatz	hyothetischer Umsatz bei multiplikativ konstantem Wachstum
Ausgangsjahr	1.430.000 €	1.430.000 €
1. Folgejahr	1.520.000 €	$f \cdot$ 1.430.000 €
2. Folgejahr	1.604.000 €	$f^2 \cdot$ 1.430.000 €
3. Folgejahr	1.300.000 €	$f^3 \cdot$ 1.430.000 €
4. Folgejahr	2.021.000 €	$f^4 \cdot$ 1.430.000 €
5. Folgejahr	2.230.000 €	$\stackrel{!}{=} f^5 \cdot$ 1.430.000 €

Durchschnittliches Wachstum

	Umsatz	hyothetischer Umsatz bei multiplikativ konstantem Wachstum
Ausgangsjahr	1.430.000 €	1.430.000 €
1. Folgejahr	1.520.000 €	$f \cdot$ 1.430.000 €
2. Folgejahr	1.604.000 €	$f^2 \cdot$ 1.430.000 €
3. Folgejahr	1.300.000 €	$f^3 \cdot$ 1.430.000 €
4. Folgejahr	2.021.000 €	$f^4 \cdot$ 1.430.000 €
5. Folgejahr	2.230.000 €	$\stackrel{!}{=} f^5 \cdot$ 1.430.000 €

Also: $f^5 = \frac{2.230.000€}{1.430.000€} = 1,559\ldots$ und somit

$$f = \sqrt[5]{1,559\ldots} = 1,093\ldots \ .$$

Durchschnittliches Wachstum

Antwort. Der Umsatz ist im Durchschnitt pro Jahr um einen Faktor von etwa $1,093$ gewachsen.

Der durchschnittliche Wachstumsfaktor betrug etwa $1,093$.

Durchschnittliches Wachstum

Antwort. Der Umsatz ist im Durchschnitt pro Jahr um einen Faktor von etwa $1,093$ gewachsen.

Der durchschnittliche Wachstumsfaktor betrug etwa $1,093$.

Frage. Um wieviel Prozent ist der Umsatz der Firma im Durchschnitt pro Jahr gewachsen?

Durchschnittliches Wachstum

Antwort. Der Umsatz ist im Durchschnitt pro Jahr um einen Faktor von etwa $1,093$ gewachsen.

Der durchschnittliche Wachstumsfaktor betrug etwa $1,093$.

Frage. Um wieviel Prozent ist der Umsatz der Firma im Durchschnitt pro Jahr gewachsen?

Hierzu schreiben wir $f = 1 + g$ und drücken g in Prozent aus. Also:

Durchschnittliches Wachstum

Antwort. Der Umsatz ist im Durchschnitt pro Jahr um einen Faktor von etwa $1,093$ gewachsen.

Der durchschnittliche Wachstumsfaktor betrug etwa $1,093$.

Frage. Um wieviel Prozent ist der Umsatz der Firma im Durchschnitt pro Jahr gewachsen?

Hierzu schreiben wir $f = 1 + g$ und drücken g in Prozent aus. Also:

Antwort. Der Umsatz ist im Durchschnitt pro Jahr um etwa $9,3\%$ gewachsen.

Die durchschnittliche Wachstumsrate betrug etwa $9,3\%$.

Durchschnitte

Merkregeln.

- Das durchschnittliche Wachstum (egal ob additiv oder multiplikativ) hängt nur vom Anfangs- und Endwert ab.
- Das durchschnittliche Wachstum ist dasjenige konstante Wachstum, das vom Anfangs- auf den Endwert führt.

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Um wieviel Pfennig ist das Biefporto pro Jahr im Durchschnitt teurer geworden?
- Um welchen Faktor ist das Briefporto im Durchschnitt pro Jahr teurer geworden?
- Um wieviel Prozent ist das Briefporto pro Jahr im Durchschnitt teurer geworden?

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Um welchen Geldbetrag, angegeben in Pfennig, ist das Biefporto pro Jahr im Durchschnitt gewachsen?
- Um welchen Faktor ist das Briefporto im Durchschnitt pro Jahr teurer geworden?
- Um wieviel Prozent ist das Briefporto pro Jahr im Durchschnitt teurer geworden?

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Um welchen Geldbetrag, angegeben in Pfennig, ist das Biefporto pro Jahr im Durchschnitt gewachsen?
- Wie war der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor des Briefportos in den zwei Jahren?
- Um wieviel Prozent ist das Briefporto pro Jahr im Durchschnitt teurer geworden?

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Um welchen Geldbetrag, angegeben in Pfennig, ist das Biefporto pro Jahr im Durchschnitt gewachsen?
- Wie war der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor des Briefportos in den zwei Jahren?
- Wie war die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate des Briefportos in den zwei Jahren, angegeben in Prozent?

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Um welchen Geldbetrag, angegeben in Pfennig, ist das Biefporto pro Jahr im Durchschnitt gewachsen?

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Um welchen Geldbetrag, angegeben in Pfennig, ist das Biefporto pro Jahr im Durchschnitt gewachsen?

Das Briefporto ist in den zwei Jahren um 180 Pfennige teurer geworden.

Also: Pro Jahr ist das Briefporto im Durchschnitt um 90 Pfennige teurer geworden.

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Um welchen Geldbetrag, angegeben in Pfennig, ist das Biefporto pro Jahr im Durchschnitt gewachsen?

Das Briefporto ist in den zwei Jahren um 180 Pfennige teurer geworden.

Also: Pro Jahr ist das Briefporto im Durchschnitt um 90 Pfennige teurer geworden.

Probe: Es ist möglich, dass es jedes Jahr um 90 Pfennig teurer geworden ist.

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Um welchen Geldbetrag, angegeben in Pfennig, ist das Biefporto pro Jahr im Durchschnitt gewachsen?

Das Briefporto ist in den zwei Jahren um 180 Pfennige gewachsen.

Also: Pro Jahr ist das Briefporto im Durchschnitt um 90 Pfennige gewachsen.

Probe: Es ist möglich, dass es jedes Jahr um 90 Pfennig gewachsen ist.

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Wie war der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor des Briefportos in den zwei Jahren?

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Wie war der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor des Briefportos in den zwei Jahren?

Das Briefporto ist in den zwei Jahren um den Faktor 10 teurer geworden.

Pro Jahr ist das Briefporto im Durchschnitt um den Faktor $\sqrt{10} \approx 3,16$ teurer geworden.

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Wie war der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor des Briefportos in den zwei Jahren?

Das Briefporto ist in den zwei Jahren um den Faktor 10 teurer geworden.

Pro Jahr ist das Briefporto im Durchschnitt um den Faktor $\sqrt{10} \approx 3,16$ teurer geworden.

Probe: Es ist möglich, dass es jedes Jahr um einen Faktor von $\sqrt{10} \approx 3,16$ teurer geworden ist.

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Wie war der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor des Briefportos in den zwei Jahren?

Das Briefporto ist in den zwei Jahren um den Faktor 10 gewachsen.

Der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor betrug $\sqrt{10} \approx \sqrt{3}, 16$.

Probe: Es ist möglich, dass das Porto mit einem konstanten jährlichen Wachstumsfaktor von $\sqrt{10} \approx 3,16$ gewachsen ist.

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Wie war die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate des Briefportos in den zwei Jahren, angegeben in Prozent?

Im Durchschnitt ist das Briefporto um etwa 216% teurer geworden.

Denn: dies entspricht einem jährlichen Wachstum mit etwa dem Faktor $3,16$.

Durchschnittliches Wachstum

Beispiel. Im Jahr 1920 betrug das normale Briefporto im Deutschen Reich 20 Pfennig, im Jahr 1922 betrug es 2 Mark.

- Wie war die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate des Briefportos in den zwei Jahren, angegeben in Prozent?

Die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate betrug etwa 216%.

Denn: dies entspricht einem jährlichen Wachstumsfaktor von $3,16$.

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Ein bisschen abstrakter:

Wir geben uns $n+1$ Zahlen $a_0, \dots, a_n$ vor. Wir interpretieren dies als Zeitreihe zu den Zeitpunkten oder Perioden $0, 1, \dots, n$.

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Ein bisschen abstrakter:

Wir geben uns $n+1$ Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ vor. Wir interpretieren dies als Zeitreihe zu den Zeitpunkten oder Perioden $0, 1, \ldots, n$.

Wir haben gesagt: Das durchschnittliche additive Wachstum der Zeitreihe ist

$$\Delta := \frac{a_n - a_0}{n} .$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Ein bisschen abstrakter:

Wir geben uns $n+1$ Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ vor. Wir interpretieren dies als Zeitreihe zu den Zeitpunkten oder Perioden $0, 1, \ldots, n$.

Wir haben gesagt: Das durchschnittliche additive Wachstum der Zeitreihe ist

$$\Delta := \frac{a_n - a_0}{n} .$$

Aber wo ist hier ein Durchschnitt?

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Ein bisschen abstrakter:

Wir geben uns $n + 1$ Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ vor. Wir interpretieren dies als Zeitreihe zu den Zeitpunkten oder Perioden $0, 1, \ldots, n$.

Wir haben gesagt: Das durchschnittliche additive Wachstum der Zeitreihe ist

$$\Delta := \frac{a_n - a_0}{n} \ .$$

Aber wo ist hier ein Durchschnitt?

Hierfür schreiben wir $a_i = a_{i-1} + \Delta_i \quad (i = 1, \ldots, n)$.

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, bend left, "+\Delta_1"] & a_1 \arrow[r, bend left, "+\Delta_2"] & a_2 \arrow[r, bend left, "+\Delta_3"] & a_3 \cdots \end{tikzcd}$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Wir haben:

$$a_1 = a_0 + \Delta_1,$$

$$a_2 = a_1 + \Delta_2$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Wir haben:

$$a_1 = a_0 + \Delta_1,$$

$$a_2 = a_1 + \Delta_2 = a_0 + \Delta_1 + \Delta_2$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Wir haben:
$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + \Delta_1, \\ a_2 &= a_1 + \Delta_2 = a_0 + \Delta_1 + \Delta_2, \\ &\dots \\ a_n &= a_0 + \Delta_1 + \cdots + \Delta_n. \end{aligned}$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Wir haben:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_0 + \Delta_1, \\
a_2 &= a_1 + \Delta_2 = a_0 + \Delta_1 + \Delta_2, \\
&\dots \\
a_n &= a_0 + \Delta_1 + \cdots + \Delta_n.
\end{aligned}
$$

Somit ist:

$$\frac{a_n - a_0}{n} = \frac{\Delta_1 + \cdots + \Delta_n}{n}$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Wir haben:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + \Delta_1, \\ a_2 &= a_1 + \Delta_2 = a_0 + \Delta_1 + \Delta_2, \\ &\dots \\ a_n &= a_0 + \Delta_1 + \cdots + \Delta_n. \end{aligned}$$

Somit ist:

$$\frac{a_n - a_0}{n} = \frac{\Delta_1 + \cdots + \Delta_n}{n}$$

Also: Das durchschnittliche additive Wachstum der Zeitreihe ist der Durchschnitt (das arithmetische Mittel) des additiven Wachstums.

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Wir betrachten nun das durchschnittliche multiplikative Wachstum (den durchschnittlichen Wachstumsfaktor).

Hierzu setzen wir voraus: Alle Zahlen der Zeitreihe seien positiv.

Wir schreiben nun $a_i = f_i \cdot a_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n)$.

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, bend left, "\cdot f_1"] & a_1 \arrow[r, bend left, "\cdot f_2"] & a_2 \arrow[r, bend left, "\cdot f_3"] & a_3 & \cdots \end{tikzcd}$$

Die Zahl f_i ist also der *Wachstumsfaktor* von Zeitpunkt $n-1$ zu Zeitpunkt n. Wenn man $f_i = 1 + g_i$ schreibt, ist g_i die *Wachstumsrate* (meist in Prozent angegeben).

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Wir haben:

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

$$a_1 = f_1 \cdot a_0,$$

Wir haben:

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Wir haben:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= f_1 \cdot a_0, \\
a_2 &= f_2 \cdot a_1 = f_2 \cdot f_1 \cdot a_0 = f_1 f_2 \cdot a_0, \\
&\dots \\
a_n &= f_1 \cdots f_n \cdot a_0
\end{aligned}
$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Wir haben:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= f_1 \cdot a_0, \\
a_2 &= f_2 \cdot a_1 = f_2 \cdot f_1 \cdot a_0 = f_1 f_2 \cdot a_0, \\
&\dots \\
a_n &= f_1 \cdots f_n \cdot a_0
\end{aligned}
$$

Somit ist der durchschnittliche Wachstumsfaktor gleich:

$$\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} = \sqrt[n]{f_1 \cdots f_n}$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Wir haben:

$$\begin{aligned} a_1 &= f_1 \cdot a_0, \\ a_2 &= f_2 \cdot a_1 = f_2 \cdot f_1 \cdot a_0 = f_1 f_2 \cdot a_0, \\ &\dots \\ a_n &= f_1 \cdots f_n \cdot a_0 \end{aligned}$$

Somit ist der durchschnittliche Wachstumsfaktor gleich:

$$\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} = \sqrt[n]{f_1 \cdots f_n}$$

Dies ist das sogenannte *geometrische Mittel* der Zahlen $f_1, \dots, f_n$.

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Wir haben:
$$
\begin{aligned}
a_1 &= f_1 \cdot a_0, \\
a_2 &= f_2 \cdot a_1 = f_2 \cdot f_1 \cdot a_0 = f_1 f_2 \cdot a_0, \\
&\dots \\
a_n &= f_1 \cdots f_n \cdot a_0
\end{aligned}
$$

Somit ist der durchschnittliche Wachstumsfaktor gleich:

$$\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} = \sqrt[n]{f_1 \cdots f_n}$$

Dies ist das sogenannte *geometrische Mittel* der Zahlen $f_1, \dots, f_n$.

Also: Der durchschnittliche Wachstumsfaktor ist das geometrische Mittel der Wachstumsfaktoren.

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Was passiert, wenn wir

$$\frac{f_1 + \cdots + f_n}{n}$$

nehmen statt

$$\sqrt[n]{f_1 \cdots f_n}\ ?$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Es gilt:

1. *Wenn die Zahlen $f_1, \ldots, f_n$ alle gleich sind, dann ist*

$$\frac{f_1 + \cdots + f_n}{n} = f_1 = \sqrt[n]{f_1 \cdots f_n}\,.$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Es gilt:

1. *Wenn die Zahlen* $f_1, \ldots, f_n$ *alle gleich sind, dann ist*
$$\frac{f_1 + \cdots + f_n}{n} = f_1 = \sqrt[n]{f_1 \cdots f_n}\,.$$

2. *Wenn die Zahlen* $f_1, \ldots, f_n$ *nicht alle gleich sind, ist*
$$\sqrt[n]{f_1 \cdots f_n} < \frac{f_1 + \cdots + f_n}{n}\,.$$

   Dies ist die *Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel*. Sie gilt wirklich immer, wenn die Zahlen nicht gleich sind.

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Es gilt:

1. *Wenn die Zahlen $f_1, \ldots, f_n$ alle gleich sind, dann ist*
$$\frac{f_1 + \cdots + f_n}{n} = f_1 = \sqrt[n]{f_1 \cdots f_n}\,.$$

2. *Wenn die Zahlen $f_1, \ldots, f_n$ nicht alle gleich sind, ist*
$$\sqrt[n]{f_1 \cdots f_n} < \frac{f_1 + \cdots + f_n}{n}\,.$$
Dies ist die *Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel*. Sie gilt wirklich immer, wenn die Zahlen nicht gleich sind.

Das heißt: Wenn man statt des geometrischen Mittels das arithmetische Mittel (den Durchschnitt) der Wachstumsfaktoren nimmt, überschätzt man das Wachstum *immer*, wenn die Wachstumsfaktoren (oder Wachstumsraten) nicht schon alle gleich sind.

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Die durchschnittliche Wachstumsrate ist gleich

$$\sqrt[n]{f_1 \cdots f_n} - 1 =$$

$$\sqrt[n]{(1+g_1)\cdots(1+g_n)} - 1 \; .$$

(Meist angegeben in Prozent.)

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Nochmal überlegen. Warum ist die durchschnittliche Wachstumsrate nicht

$$\frac{g_1 + \cdots + g_n}{n}\ ?$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Nochmal überlegen. Warum ist die durchschnittliche Wachstumsrate nicht

$$\frac{g_1 + \cdots + g_n}{n} \; ?$$

Angenommen, das wäre so. Dann wäre der durchschnittliche Wachstumsfaktor gleich

$$\tfrac{g_1 + \cdots + g_n}{n} + 1 =$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Nochmal überlegen. Warum ist die durchschnittliche Wachstumsrate nicht

$$\frac{g_1 + \cdots + g_n}{n} \text{ ?}$$

Angenommen, das wäre so. Dann wäre der durchschnittliche Wachstumsfaktor gleich

$$\tfrac{g_1+\cdots+g_n}{n} + 1 = \tfrac{g_1+\cdots+g_n+n}{n} =$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Nochmal überlegen. Warum ist die durchschnittliche Wachstumsrate nicht

$$\frac{g_1 + \cdots + g_n}{n}\ ?$$

Angenommen, das wäre so. Dann wäre der durchschnittliche Wachstumsfaktor gleich

$$\tfrac{g_1+\cdots+g_n}{n} + 1 = \tfrac{g_1+\cdots+g_n+n}{n} =$$

$$\tfrac{(1+g_1)+\cdots+(1+g_n)}{n} =$$

Durchschnittliches Wachstum als Mittelwert

Nochmal überlegen. Warum ist die durchschnittliche Wachstumsrate nicht

$$\frac{g_1 + \cdots + g_n}{n} \ ?$$

Angenommen, das wäre so. Dann wäre der durchschnittliche Wachstumsfaktor gleich

$$\tfrac{g_1+\cdots+g_n}{n} + 1 = \tfrac{g_1+\cdots+g_n+n}{n} =$$

$$\tfrac{(1+g_1)+\cdots+(1+g_n)}{n} = \tfrac{f_1+\cdots+f_n}{n} \ .$$

Wir haben aber schon gesehen, dass das falsch ist. (Es ist in der Regel zu hoch!)

Beispiel

Der Wert eines Portfolios steigt innerhalb eines Jahres um 10% und fällt im darauffolgenden Jahr um 10%.

Beispiel

Der Wert eines Portfolios steigt innerhalb eines Jahres um 10% und fällt im darauffolgenden Jahr um 10%.

Der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor ist hier

$$\sqrt{1,1 \cdot 0,9} = \sqrt{0,99} \approx 0,995 \ .$$

Die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate ist $\approx -0,5\%$.

Beispiel

Der Wert eines Portfolios steigt innerhalb eines Jahres um 10% und fällt im darauffolgenden Jahr um 10%.

Der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor ist hier

$$\sqrt{1,1 \cdot 0,9} = \sqrt{0,99} \approx 0,995\ .$$

Die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate ist $\approx -0,5\%$.

Oder kurz: Im Durchschnitt wurde pro Jahr etwa ein halbes Prozent Verlust gemacht.

Beispiel

Der Wert eines Portfolios steigt innerhalb eines Jahres um 10% und fällt im darauffolgenden Jahr um 10%.

Der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor ist hier

$$\sqrt{1,1 \cdot 0,9} = \sqrt{0,99} \approx 0,995 \; .$$

Die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate ist $\approx -0,5\%$.

Oder kurz: Im Durchschnitt wurde pro Jahr etwa ein halbes Prozent Verlust gemacht.

Aber der Durchschnitt von 10% und -10% ist 0.

Beispiel

Der Wert eines Portfolios steigt innerhalb eines Jahres um 10% und fällt im darauffolgenden Jahr um 10%.

Der durchschnittliche jährliche Wachstumsfaktor ist hier

$$\sqrt{1,1 \cdot 0,9} = \sqrt{0,99} \approx 0,995 \; .$$

Die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate ist $\approx -0,5\%$.

Oder kurz: Im Durchschnitt wurde pro Jahr etwa ein halbes Prozent Verlust gemacht.

Aber der Durchschnitt von 10% und -10% ist 0.

Mit der falschen Rechnung wird der Verlust verschleiert!