Jeweils am Montag um 18:30 treffen sich Studenten in Seminarraum 3 zum gemeinsamen Lernen.

Betrachtungen zu
Sprache, Logik und Beweisen

Sprache

Wir gehen von unserem **Alphabet** einigen Zusatzsymbolen aus.
Das Leerzeichen sei eins davon.

Sprache

Wir gehen von unserem **Alphabet** einigen Zusatzsymbolen aus. Das Leerzeichen sei eins davon.

All diese Zeichen nennen wir **Symbole**.

Sprache

Wir gehen von unserem **Alphabet** einigen Zusatzsymbolen aus. Das Leerzeichen sei eins davon.

All diese Zeichen nennen wir **Symbole**.

Wir betrachten Kombinationen von diesen Symbolen (**Symbolkombinationen**). Ein **Satz** ist eine spezielle Symbolkombination.

Bedeutung

In einem bestimmten Kontext haben Wörter bestimmte **Bedeutungen**.

- “Mein Auto”. Dies hat für mich eine bestimmte Bedeutung.

Bedeutung

In einem bestimmten Kontext haben Wörter bestimmte **Bedeutungen**.

- "Mein Auto". Dies hat für mich eine bestimmte Bedeutung.
- "7". Dies hat üblicherweise die Bedeutung der Zahl, die man beim Zählen nach der 6 erhält.

Bedeutung

In einem bestimmten Kontext haben Wörter bestimmte **Bedeutungen**.

- "Mein Auto". Dies hat für mich eine bestimmte Bedeutung.
- "7". Dies hat üblicherweise die Bedeutung der Zahl, die man beim Zählen nach der 6 erhält.

  (Eine Zahl selbst ist etwas abstraktes, das Symbol "7" ist nicht die Zahl sondern verweist auf die Zahl.)

Bedeutung

In einem bestimmten Kontext haben Wörter bestimmte **Bedeutungen**.

- “Mein Auto”. Dies hat für mich eine bestimmte Bedeutung.
- “7”. Dies hat üblicherweise die Bedeutung der Zahl, die man beim Zählen nach der 6 erhält.

  (Eine Zahl selbst ist etwas abstraktes, das Symbol “7” ist nicht die Zahl sondern verweist auf die Zahl.)
- $\frac{de^x}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

Bedeutung

In einem bestimmten Kontext haben Wörter bestimmte **Bedeutungen**.

- "Mein Auto". Dies hat für mich eine bestimmte Bedeutung.
- "7". Dies hat üblicherweise die Bedeutung der Zahl, die man beim Zählen nach der 6 erhält.

  (Eine Zahl selbst ist etwas abstraktes, das Symbol "7" ist nicht die Zahl sondern verweist auf die Zahl.)
- $\frac{de^x}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

Viele Diskussionen beruhen auf unklaren Vorstellungen darüber, was bestimmte Wörter / Sätze bedeuten sollen.

Sätze

Bestimmte Symbolkombinationen heißen (in einem bestimmten Kontext) **Sätze** (einer **Sprache**). Eine Satz muss **grammatikalisch richtig** in Bezug auf die Sprache sein.

Bestimmte Sätze sind **Aussagesätze**. In einem bestimmten Kontext haben Aussagesätze Bedeutungen; dies sind dann **Aussagen**.

Sätze

Bestimmte Symbolkombinationen heißen (in einem bestimmten Kontext) **Sätze** (einer **Sprache**). Eine Satz muss **grammatikalisch richtig** in Bezug auf die Sprache sein.

Bestimmte Sätze sind **Aussagesätze**. In einem bestimmten Kontext haben Aussagesätze Bedeutungen; dies sind dann **Aussagen**.

Beachte. Man kann verschiedene Sprachen benutzen, z.B. die deutsche oder die englische Sprache.

Sätze

Bestimmte Symbolkombinationen heißen (in einem bestimmten Kontext) **Sätze** (einer **Sprache**). Eine Satz muss **grammatikalisch richtig** in Bezug auf die Sprache sein.

Bestimmte Sätze sind **Aussagesätze**. In einem bestimmten Kontext haben Aussagesätze Bedeutungen; dies sind dann **Aussagen**.

Beachte. Man kann verschiedene Sprachen benutzen, z.B. die deutsche oder die englische Sprache.

In der Mathematik benutzt man teilweise natürliche Sprache und teilweise eine abstrakte "Symbolsprache". Man kann beides auch mischen – das machen wir auch oft.

Sätze

Bestimmte Symbolkombinationen heißen (in einem bestimmten Kontext) **Sätze** (einer **Sprache**). Eine Satz muss **grammatikalisch richtig** in Bezug auf die Sprache sein.

Bestimmte Sätze sind **Aussagesätze**. In einem bestimmten Kontext haben Aussagesätze Bedeutungen; dies sind dann **Aussagen**.

Beachte. Man kann verschiedene Sprachen benutzen, z.B. die deutsche oder die englische Sprache.

In der Mathematik benutzt man teilweise natürliche Sprache und teilweise eine abstrakte "Symbolsprache". Man kann beides auch mischen – das machen wir auch oft.

Sätze in Symbolsprache kann man in Sätze in der normalen Sprache umformulieren. Das ist eine gute Übung!

Identität

Wir betrachten nun zwei Symbolkombinationen (mit bestimmten Einschränkungen)

Identität

Wir betrachten nun zwei Symbolkombinationen (mit bestimmten Einschränkungen), die wir mit X und Y bezeichnen.

Identität

Wir betrachten nun zwei Symbolkombinationen (mit bestimmten Einschränkungen), die wir mit X und Y bezeichnen.

Bemerkung. Hier stehen also die Symbole “X” und “Y” für diese Symbolkombinationen. Sie sind nicht identisch zu den Symbolkombinationen. Wir haben also ein Beispiel dafür, dass Symbole / Symbolkombinationen auf etwas verweisen können.

Identität

Wir haben nun den Satz:

$$X = Y$$

Dies kann man in der Umgangssprache so ausdrücken:

X und Y sind identisch.

Identität

Wir haben nun den Satz:

$$X = Y$$

Dies kann man in der Umgangssprache so ausdrücken:

X und Y sind identisch.

Und dies besagt: Die beiden Symbolkombinationen verweisen auf dasselbe Ding, dasselbe Abstraktum.

Identität

Beispiel.

$$\text{Mein Auto} = \text{Das Auto vor meiner Haustür}$$

Identität

Was bedeutet nun

$$6^+ = 7 \quad ?$$

Identität

Was bedeutet nun

$$6^+ = 7 \quad ?$$

Antwort. Der Nachfolger der Zahl 6 ist identisch zur Zahl 7.

Aussagen

Aussagen können richtig oder falsch sein.

Aussagen

Aussagen können richtig oder falsch sein.

Man kann subjektiv von der Wahrheit oder der Falschheit überzeugt sein oder nicht.

Aussagen

Aussagen können richtig oder falsch sein.

Man kann subjektiv von der Wahrheit oder der Falschheit überzeugt sein oder nicht.

Beweise sind Mittel, um sich Klarheit hierüber zu verschaffen.

Verknüpfungen von Aussagen

Wenn A eine Aussage ist, haben wir die Aussage

$$\text{nicht } A \qquad (\neg A)$$

Verknüpfungen von Aussagen

Wenn A eine Aussage ist, haben wir die Aussage

$$\text{nicht } A \qquad (\neg A)$$

Wenn A und B Aussagen sind, haben wir die Aussagen:

$$A \text{ und } B \qquad (A \wedge B)$$

$$A \text{ oder } B \qquad (A \vee B)$$

Implikationen

Wenn A und B Aussagen sind, haben wir die Aussage

$$\text{Wenn } A \text{ dann } B$$

Implikationen

Wenn A und B Aussagen sind, haben wir die Aussage

$$\text{Wenn } A \text{ dann } B \text{ ,}$$

was dasselbe ist wie:

$$A \text{ impliziert } B$$

Implikationen

Wenn A und B Aussagen sind, haben wir die Aussage

Wenn A dann B ,

was dasselbe ist wie:

A impliziert B

Symbolisch:

$$A \to B$$

Dies ist nach Definition dieselbe Aussage wie

Es ist ausgeschlossen, dass A gilt und B nicht gilt.

$$\neg(A \wedge \neg B)$$

Implikationen

Wenn A und B Aussagen sind, haben wir die Aussage

Wenn A dann B ,

was dasselbe ist wie:

A impliziert B

Symbolisch:

$$A \rightarrow B$$

Dies ist nach Definition dieselbe Aussage wie

Es ist ausgeschlossen, dass A gilt und B nicht gilt.

$$\neg(A \wedge \neg B)$$

Das ist eine einfache Umformulierung von:

A gilt nicht oder B gilt.

$$\neg A \vee B$$

Implikationen

$$A \to B$$

Bemerkung. Man beachte den "einfachen" Pfeil – im Gegensatz zum Doppelfpeil. Der einfache Pfeil ist besser, weil der Doppelpfeil noch eine andere Bedeutung hat ...

Beispiele

Für alle reellen Zahlen gilt:

$$a \leq b \to a \leq b + 1$$

Kurz:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \to a \leq b + 1$$

Beispiel

Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$(a \leq b \wedge b \leq c) \rightarrow a \leq c$$

Kurz:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b \wedge b \leq c) \rightarrow a \leq c$$

Beispiel

Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$(a \leq b \wedge b \leq c) \rightarrow a \leq c$$

Kurz:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b \wedge b \leq c) \rightarrow a \leq c$$

Blick auf die Wirtschaftswissenschaften. Man sagt:

"Die Relation $\leq$ ist **transitiv**."

Beispiel

Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$(a \leq b \land b \leq c) \to a \leq c$$

Kurz:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b \land b \leq c) \to a \leq c$$

Blick auf die Wirtschaftswissenschaften. Man sagt:

"Die Relation $\leq$ ist **transitiv**."

Transitivität ist bei Präferenzrelationen wichtig.

Beispiel

Sei f eine Funktion, $x_0 \in D_f$. Dann heißt f **stetig** an x_0, falls gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ für $x \in D_f$ mit $|x - x_0| \leq \delta$.

Beispiel

Sei f eine Funktion, $x_0 \in D_f$. Dann heißt f **stetig** an x_0, falls gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ für $x \in D_f$ mit $|x - x_0| \leq \delta$.

Formaler:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in D_f$ gilt:

$$|x - x_0| \leq \delta \to |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Beispiel

Sei f eine Funktion, $x_0 \in D_f$. Dann heißt f **stetig** an x_0, falls gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ für $x \in D_f$ mit $|x - x_0| \leq \delta$.

Formaler:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in D_f$ gilt:

$$|x - x_0| \leq \delta \to |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Noch formaler:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f : |x - x_0| \leq \delta \to |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Äquivalenz

Die Aussage

$$A \text{ ist äquivalent zu } B$$

$$A \leftrightarrow B$$

bedeutet dasselbe wie:

$$A \text{ impliziert } B \text{ und } B \text{ impliziert } A.$$

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

Äquivalenz

Die Aussage

$$A \text{ ist äquivalent zu } B$$

$$A \leftrightarrow B$$

bedeutet dasselbe wie:

$$A \text{ impliziert } B \text{ und } B \text{ impliziert } A.$$

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

Eine Umformulierung ist:

Es gelten (entweder) beide Aussagen A, B oder
keine der beiden Aussagen.

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Äquivalenz

Die Aussage

$$A \text{ ist äquivalent zu } B$$

$$A \leftrightarrow B$$

bedeutet dasselbe wie:

$$A \text{ impliziert } B \text{ und } B \text{ impliziert } A.$$

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

Eine Umformulierung ist:

Es gelten (entweder) beide Aussagen A, B oder
keine der beiden Aussagen.

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Bemerkung. Der einfache Pfeil ist die Schreibweise in der Logik.
Meist wird der doppelte geschrieben. Aber der einfache ist besser ...

Beweise

Eine Aussage in der Mathematik muss nicht sofort evident sein.

Aber eine Aussage in einem Beweis sollte (relativ schnell) einsichtig sein.

Beweise

Insbesondere:

Wenn wir in einem Beweis schreiben

$$a = b = c = d \ ,$$

so sollten die Gleichheiten $a = b$, $b = c$, $c = d$ klar sein.

Schlüsse

In Beweisen **schließt** man von einer oder mehreren Aussagen auf eine oderer mehrere weitere Aussagen:

Schlüsse

In Beweisen **schließt** man von einer oder mehreren Aussagen auf eine oderer mehrere weitere Aussagen:

"Es gilt A. **Also** gilt auch B."

Schlüsse

In Beweisen **schließt** man von einer oder mehreren Aussagen auf eine oderer mehrere weitere Aussagen:

“Es gilt A. **Also** gilt auch B.”

Oder:

“Es gilt A. **Und somit** gilt auch B.”

Schlüsse

In Beweisen **schließt** man von einer oder mehreren Aussagen auf eine oderer mehrere weitere Aussagen:

“Es gilt A. **Also** gilt auch B.”

Oder:

“Es gilt A. **Und somit** gilt auch B.”

Oder:

“Es gilt A. **Und deshalb** gilt auch B.”

Schlüsse

In Beweisen **schließt** man von einer oder mehreren Aussagen auf eine oderer mehrere weitere Aussagen:

“Es gilt A. **Also** gilt auch B.”

Oder:

“Es gilt A. **Und somit** gilt auch B.”

Oder:

“Es gilt A. **Und deshalb** gilt auch B.”

Oder:

“Es gilt A. **Daraus folgt**, dass auch B gilt.”

Schlüsse

In Beweisen **schließt** man von einer oder mehreren Aussagen auf eine oderer mehrere weitere Aussagen:

"Es gilt A. **Also** gilt auch B."

Oder:

"Es gilt A. **Und somit** gilt auch B."

Oder:

"Es gilt A. **Und deshalb** gilt auch B."

Oder:

"Es gilt A. **Daraus folgt**, dass auch B gilt."

Oder:

"Es gilt B, **denn** es gilt A."

Schlüsse

In all diesen Fällen wird gesagt:

1. Es gilt die Aussage A.

Schlüsse

In all diesen Fällen wird gesagt:

1. Es gilt die Aussage A.
2. Wenn wir dies beachten und noch einiges mehr, was offensichtlich ist und was wir im Hinterkopf haben (sollten), können wir einsehen, dass auch B gelten muss.

Schlüsse

In all diesen Fällen wird gesagt:

1. Es gilt die Aussage A.
2. Wenn wir dies beachten und noch einiges mehr, was offensichtlich ist und was wir im Hinterkopf haben (sollten), können wir einsehen, dass auch B gelten muss.

Wichtig ist in 2., dass es einen **inahltichen Zusammenhang** gibt.

Schlüsse

In all diesen Fällen wird gesagt:

1. Es gilt die Aussage A.
2. Wenn wir dies beachten und noch einiges mehr, was offensichtlich ist und was wir im Hinterkopf haben (sollten), können wir einsehen, dass auch B gelten muss.

Wichtig ist in 2., dass es einen **inahltichen Zusammenhang** gibt.

Bemerkung. Oftmals beruhen alle die Aussagen (und Schlüsse) auf einer grundlegenden Voraussetzung / Annahme. Das ändert dann aber nichts an der Darstellung.

Schlüsse

Beispiel aus der ersten Vorlesung:

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$\begin{aligned} & \ln((1+\tfrac{1}{a})^a) && = && a \cdot \ln(1+\tfrac{1}{a}) \\ = \quad & a \cdot \ln(\tfrac{1+a}{a}) && = && a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \end{aligned}$$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$\begin{array}{rcl} & \ln((1+\frac{1}{a})^a) & = & a \cdot \ln(1+\frac{1}{a}) \\ = & a \cdot \ln(\frac{1+a}{a}) & = & a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\ = & a \cdot \frac{1}{c} & & \text{mit } c \in (a, a+1). \end{array}$$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$
\begin{array}{rlcl}
 & \ln((1+\frac{1}{a})^a) & = & a \cdot \ln(1+\frac{1}{a}) \\
= & a \cdot \ln(\frac{1+a}{a}) & = & a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\
= & a \cdot \frac{1}{c} & & \text{mit } c \in (a, a+1). \\
\in & (\frac{a}{a+1}, 1) & &
\end{array}
$$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$
\begin{array}{rlll}
 & \ln((1+\frac{1}{a})^a) & = & a \cdot \ln(1+\frac{1}{a}) \\
= & a \cdot \ln(\frac{1+a}{a}) & = & a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\
= & a \cdot \frac{1}{c} & & \text{mit } c \in (a, a+1). \\
\in & (\frac{a}{a+1}, 1) & & \\
= & (1 - \frac{1}{a+1}, 1) & &
\end{array}
$$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$
\begin{aligned}
\ln((1+\tfrac{1}{a})^a) &= a \cdot \ln(1+\tfrac{1}{a}) \\
= \quad a \cdot \ln(\tfrac{1+a}{a}) &= a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\
= \quad a \cdot \tfrac{1}{c} & \qquad \text{mit } c \in (a, a+1). \\
\in \quad (\tfrac{a}{a+1}, 1) & \\
= \quad (1 - \tfrac{1}{a+1}, 1) &
\end{aligned}
$$

Somit: Für $a \longrightarrow \infty$ konvergiert $\ln((1+\frac{1}{a})^a)$ gegen 1.

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$
\begin{array}{rlcl}
 & \ln((1+\frac{1}{a})^a) & = & a \cdot \ln(1+\frac{1}{a}) \\
= & a \cdot \ln(\frac{1+a}{a}) & = & a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\
= & a \cdot \frac{1}{c} & & \text{mit } c \in (a, a+1). \\
\in & (\frac{a}{a+1}, 1) & & \\
= & (1 - \frac{1}{a+1}, 1) & &
\end{array}
$$

Somit: Für $a \longrightarrow \infty$ konvergiert $\ln((1+\frac{1}{a})^a)$ gegen 1.

Also: Für $a \longrightarrow \infty$ konverigiert $(1+\frac{1}{a})^a$ gegen e. $\square$

Der Folgepfeil

Statt "somit" schreibt man gerne

$$\Longrightarrow$$

besonders an der Tafel.

Der Folgepfeil

Statt “somit” schreibt man gerne

$$\Longrightarrow$$

besonders an der Tafel.

In anderen Ländern wie z.B. in Großbritannien, Japan, China wird auch des öfteren

$$\therefore$$

geschrieben.

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$\begin{aligned} \ln((1+\tfrac{1}{a})^a) &= a \cdot \ln(1+\tfrac{1}{a}) \\ = \quad a \cdot \ln(\tfrac{1+a}{a}) &= a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \end{aligned}$$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$\begin{array}{rclcl} & & \ln((1+\frac{1}{a})^a) & = & a \cdot \ln(1+\frac{1}{a}) \\ & = & a \cdot \ln(\frac{1+a}{a}) & = & a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\ & = & a \cdot \frac{1}{c} & & \text{mit } c \in (a, a+1). \end{array}$$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$
\begin{array}{rlcl}
 & \ln((1+\frac{1}{a})^a) & = & a \cdot \ln(1+\frac{1}{a}) \\
= & a \cdot \ln(\frac{1+a}{a}) & = & a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\
= & a \cdot \frac{1}{c} & & \text{mit } c \in (a, a+1). \\
\in & (\frac{a}{a+1}, 1) & &
\end{array}
$$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$\begin{array}{rlcl} & \ln((1+\frac{1}{a})^a) & = & a \cdot \ln(1+\frac{1}{a}) \\ = & a \cdot \ln(\frac{1+a}{a}) & = & a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\ = & a \cdot \frac{1}{c} & & \text{mit } c \in (a, a+1). \\ \in & (\frac{a}{a+1}, 1) & & \\ = & (1 - \frac{1}{a+1}, 1) & & \end{array}$$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$\begin{array}{rlll} & \ln((1+\frac{1}{a})^a) & = & a \cdot \ln(1+\frac{1}{a}) \\ = & a \cdot \ln(\frac{1+a}{a}) & = & a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\ = & a \cdot \frac{1}{c} & & \text{mit } c \in (a, a+1). \\ \in & (\frac{a}{a+1}, 1) & & \\ = & (1 - \frac{1}{a+1}, 1) & & \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Für $a \longrightarrow \infty$ konvergiert $\ln((1+\frac{1}{a})^a)$ gegen 1.

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$\begin{array}{rlcl} & \ln((1+\frac{1}{a})^a) & = & a \cdot \ln(1+\frac{1}{a}) \\ = & a \cdot \ln(\frac{1+a}{a}) & = & a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\ = & a \cdot \frac{1}{c} & & \text{mit } c \in (a, a+1). \\ \in & (\frac{a}{a+1}, 1) & & \\ = & (1 - \frac{1}{a+1}, 1) & & \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Für $a \longrightarrow \infty$ konvergiert $\ln((1+\frac{1}{a})^a)$ gegen 1.

$\Longrightarrow$ Für $a \longrightarrow \infty$ konverigiert $(1+\frac{1}{a})^a$ gegen e. $\square$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$\begin{aligned} \ln((1+\tfrac{1}{a})^a) &= a \cdot \ln(1+\tfrac{1}{a}) \\ = \quad a \cdot \ln(\tfrac{1+a}{a}) &= a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \end{aligned}$$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$\begin{aligned} \ln((1+\tfrac{1}{a})^a) &= a \cdot \ln(1+\tfrac{1}{a}) \\ = \quad a \cdot \ln(\tfrac{1+a}{a}) &= a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\ = \quad a \cdot \tfrac{1}{c} & \quad \text{mit } c \in (a, a+1). \end{aligned}$$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$\begin{array}{rlll} & \ln((1+\frac{1}{a})^a) & = & a \cdot \ln(1+\frac{1}{a}) \\ = & a \cdot \ln(\frac{1+a}{a}) & = & a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\ = & a \cdot \frac{1}{c} & & \text{mit } c \in (a, a+1). \\ \in & (\frac{a}{a+1}, 1) & & \end{array}$$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$
\begin{array}{rll}
 & \ln((1+\frac{1}{a})^a) & = \quad a \cdot \ln(1+\frac{1}{a}) \\
= & a \cdot \ln(\frac{1+a}{a}) & = \quad a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\
= & a \cdot \frac{1}{c} & \quad \text{mit } c \in (a, a+1). \\
\in & (\frac{a}{a+1}, 1) & \\
= & (1 - \frac{1}{a+1}, 1) &
\end{array}
$$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$
\begin{array}{rll}
 & \ln((1+\frac{1}{a})^a) & = \quad a \cdot \ln(1+\frac{1}{a}) \\
= & a \cdot \ln(\frac{1+a}{a}) & = \quad a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\
= & a \cdot \frac{1}{c} & \quad\;\; \text{mit } c \in (a, a+1). \\
\in & (\frac{a}{a+1}, 1) & \\
= & (1 - \frac{1}{a+1}, 1) &
\end{array}
$$

$\therefore$ Für $a \longrightarrow \infty$ konvergiert $\ln((1+\frac{1}{a})^a)$ gegen 1.

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$\begin{aligned}
\ln((1+\tfrac{1}{a})^a) &= a \cdot \ln(1+\tfrac{1}{a}) \\
= \quad a \cdot \ln(\tfrac{1+a}{a}) &= a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\
= \quad a \cdot \tfrac{1}{c} & \quad \text{mit } c \in (a, a+1). \\
\in \quad (\tfrac{a}{a+1}, 1) & \\
= \quad (1 - \tfrac{1}{a+1}, 1) &
\end{aligned}$$

$\therefore$ Für $a \longrightarrow \infty$ konvergiert $\ln((1+\frac{1}{a})^a)$ gegen 1.

$\therefore$ Für $a \longrightarrow \infty$ konverigiert $(1+\frac{1}{a})^a$ gegen e. $\square$

Der Folgepfeil

Wenn man die beiden Schlüsse einsehen will, muss man mehr wissen, als angegeben:

Der Folgepfeil

Wenn man die beiden Schlüsse einsehen will, muss man mehr wissen, als angegeben:

Beim ersten Schluss muss man die Definition von Konvergenz kennen und noch ein wenig überlegen.

Der Folgepfeil

Wenn man die beiden Schlüsse einsehen will, muss man mehr wissen, als angegeben:

Beim ersten Schluss muss man die Definition von Konvergenz kennen und noch ein wenig überlegen.

Beim zweiten Schluss muss man wissen: Die e-Funktion ist stetig.

Anwendung

Aufgabe aus der Klausur

Betrachten Sie die wie folgt definierte Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$:

$$f(x) := x^3 + 2x^2 - x + 2$$

Bestimmen Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 1| \leq \delta$!

Anwendung

“Verbale” Lösung

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Anwendung

“Verbale” Lösung

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Sei nun ferner $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Anwendung

“Verbale” Lösung

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Sei nun ferner $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $x' := x - 1$, d.h. $x = x' + 1$.

Anwendung

“Verbale” Lösung

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Sei nun ferner $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $x' := x - 1$, d.h. $x = x' + 1$.

Wir wollen:

$$|f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$$

Anwendung

"Verbale" Lösung

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Sei nun ferner $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $x' := x - 1$, d.h. $x = x' + 1$.

Wir wollen:

$$|f(x) - f(1)| \leq \varepsilon \ ,$$

d.h.

$$|((x' + 1)^3 + 2(x' + 1)^2 - (x' + 1) + 2) - 4| \leq \varepsilon \ ,$$

d.h.

$$|(x')^3 + 3(x')^2 + 3x' + 1 + 2(x')^2 + 4x' + 2 - x' - 1 - 2| \leq \varepsilon \ ,$$

d.h.

$$|(x')^3 + 5(x')^2 + 6x'| \leq \varepsilon \ .$$

Anwendung

“Verbale” Lösung

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Sei nun ferner $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $x' := x - 1$, d.h. $x = x' + 1$.

Wir wollen:

$$|f(x) - f(1)| \leq \varepsilon \ ,$$

d.h.

$$|((x' + 1)^3 + 2(x' + 1)^2 - (x' + 1) + 2) - 4| \leq \varepsilon \ ,$$

d.h.

$$|(x')^3 + 3(x')^2 + 3x' + 1 + 2(x')^2 + 4x' + 2 - x' - 1 - 2| \leq \varepsilon \ ,$$

d.h.

$$|(x')^3 + 5(x')^2 + 6x'| \leq \varepsilon \ .$$

Dies ist insbesondere erfüllt, falls gilt:

$$|(x')^3| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ und } |5(x')^2| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ und } |6x'| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Anwendung

Dies ist äquivalent zu:

$$|x'| \leq \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}} \text{ und } |x'| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{15}} \text{ und } |x'| \leq \frac{\varepsilon}{18}$$

Anwendung

Dies ist äquivalent zu:

$$|x'| \le \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}} \text{ und } |x'| \le \sqrt{\frac{\varepsilon}{15}} \text{ und } |x'| \le \frac{\varepsilon}{18}$$

Aus diesen Überlegungen folgt: Wenn wir

$$\delta := \min\left\{\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{15}}, \frac{\varepsilon}{18}\right\}$$

setzen, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 1| \le \delta$: $|f(x) - f(1)| \le \varepsilon$.

Anwendung

“Meine Lösung” vor der Klausur

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Sei nun ferner $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Anwendung

“Meine Lösung” vor der Klausur

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Sei nun ferner $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Setze $x' := x - 1$, d.h. $x = x' + 1$.

Anwendung

“Meine Lösung” vor der Klausur

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Sei nun ferner $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Setze $x' := x - 1$, d.h. $x = x' + 1$.

Dann gelten die folgenden Implikationen:

$$|f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$$

$$\iff |((x'+1)^3 + 2(x'+1)^2 - (x'+1) + 2) - 4| \leq \varepsilon$$

$$\iff |(x')^3 + 3(x')^2 + 3x' + 1 + 2(x')^2 + 4x' + 2 - x' - 1 - 2| \leq \varepsilon$$

$$\iff |(x')^3 + 5(x')^2 + 6x'| \leq \varepsilon$$

$$\Longleftarrow |(x')^3| \leq \frac{\varepsilon}{3} \ \wedge\ |5(x')^2| \leq \frac{\varepsilon}{3} \ \wedge\ |6x'| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Anwendung

$$\Longleftrightarrow |x'| \leq \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}} \wedge |x'| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{15}} \ \wedge \ |x'| \leq \frac{\varepsilon}{18}$$

Anwendung

$$\iff |x'| \leq \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}} \wedge |x'| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{15}} \ \wedge \ |x'| \leq \frac{\varepsilon}{18}$$

Somit: Wenn wir

$$\delta := \min\left\{\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{15}}, \frac{\varepsilon}{18}\right\}$$

setzen, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| \leq \delta$: $|f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$.

Anwendung

Lösung mit Implikationspfeilen und Folgepfeil

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Sei nun ferner $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Setze $x' := x - 1$, d.h. $x = x' + 1$.

Anwendung

Lösung mit Implikationspfeilen und Folgepfeil

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Sei nun ferner $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Setze $x' := x - 1$, d.h. $x = x' + 1$.

Dann gilt:

$$\begin{gathered}
|f(x) - f(1)| \leq \varepsilon \\
\leftrightarrow |((x'+1)^3 + 2(x'+1)^2 - (x'+1) + 2) - 4| \leq \varepsilon \\
\leftrightarrow |(x')^3 + 3(x')^2 + 3x' + 1 + 2(x')^2 + 4x' + 2 - x' - 1 - 2| \leq \varepsilon \\
\leftrightarrow |(x')^3 + 5(x')^2 + 6x'| \leq \varepsilon \\
\leftarrow |(x')^3| \leq \frac{\varepsilon}{3} \ \wedge \ |5(x')^2| \leq \frac{\varepsilon}{3} \ \wedge \ |6x'| \leq \frac{\varepsilon}{3}
\end{gathered}$$

Anwendung

$$\leftrightarrow |x'| \leq \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}} \ \wedge \ |x'| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{15}} \ \wedge \ |x'| \leq \frac{\varepsilon}{18}$$

Anwendung

$$\leftrightarrow |x'| \leq \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}} \;\wedge\; |x'| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{15}} \;\wedge\; |x'| \leq \frac{\varepsilon}{18}$$

$\implies$ Wenn wir

$$\delta := \min\left\{\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{15}}, \frac{\varepsilon}{18}\right\}$$

setzen, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$|x - 1| \leq \delta \to |f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$$

Anwendung

$$\leftrightarrow |x'| \leq \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}} \ \land \ |x'| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{15}} \ \land \ |x'| \leq \frac{\varepsilon}{18}$$

$\implies$ Wenn wir

$$\delta := \min\left\{\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{15}}, \frac{\varepsilon}{18}\right\}$$

setzen, gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq \delta \rightarrow |f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$$

Einige wichtige Aspekte

Einige wichtige Aspekte

- Aussagesätze sind bestimmte grammatikalisch richtige Symbolkombinationen.

Einige wichtige Aspekte

- Aussagesätze sind bestimmte grammatikalisch richtige Symbolkombinationen.
- Nur wenn alle vorkommenenden Begriffe geklärt sind, wird durch einen Aussagesatz eine Aussage gemacht.

Einige wichtige Aspekte

- Aussagesätze sind bestimmte grammatikalisch richtige Symbolkombinationen.
- Nur wenn alle vorkommenenden Begriffe geklärt sind, wird durch einen Aussagesatz eine Aussage gemacht.
- Aussagen können äquivalent oder nicht äquivalent sein.

Einige wichtige Aspekte

- Aussagesätze sind bestimmte grammatikalisch richtige Symbolkombinationen.
- Nur wenn alle vorkommenenden Begriffe geklärt sind, wird durch einen Aussagesatz eine Aussage gemacht.
- Aussagen können äquivalent oder nicht äquivalent sein.
- Aussagen können richtig oder falsch sein.

Einige wichtige Aspekte

- Aussagesätze sind bestimmte grammatikalisch richtige Symbolkombinationen.
- Nur wenn alle vorkommenenden Begriffe geklärt sind, wird durch einen Aussagesatz eine Aussage gemacht.
- Aussagen können äquivalent oder nicht äquivalent sein.
- Aussagen können richtig oder falsch sein.
- Sachen und Abstrakta können gleich oder ungleich sein.

Einige wichtige Aspekte

- Aussagesätze sind bestimmte grammatikalisch richtige Symbolkombinationen.
- Nur wenn alle vorkommenenden Begriffe geklärt sind, wird durch einen Aussagesatz eine Aussage gemacht.
- Aussagen können äquivalent oder nicht äquivalent sein.
- Aussagen können richtig oder falsch sein.
- Sachen und Abstrakta können gleich oder ungleich sein.
- In Beweisen wird von einer oder mehreren Aussagen auf eine weitere Aussage geschlossen. Die "Lücken" dazwischen sollten "evident" sein.

Einige wichtige Aspekte

- Aussagesätze sind bestimmte grammatikalisch richtige Symbolkombinationen.
- Nur wenn alle vorkommenenden Begriffe geklärt sind, wird durch einen Aussagesatz eine Aussage gemacht.
- Aussagen können äquivalent oder nicht äquivalent sein.
- Aussagen können richtig oder falsch sein.
- Sachen und Abstrakta können gleich oder ungleich sein.
- In Beweisen wird von einer oder mehreren Aussagen auf eine weitere Aussage geschlossen. Die "Lücken" dazwischen sollten "evident" sein.
- Hierbei wird oftmals der Folgepfeil eingesetzt.

Einige wichtige Aspekte

- Aussagesätze sind bestimmte grammatikalisch richtige Symbolkombinationen.
- Nur wenn alle vorkommenenden Begriffe geklärt sind, wird durch einen Aussagesatz eine Aussage gemacht.
- Aussagen können äquivalent oder nicht äquivalent sein.
- Aussagen können richtig oder falsch sein.
- Sachen und Abstrakta können gleich oder ungleich sein.
- In Beweisen wird von einer oder mehreren Aussagen auf eine weitere Aussage geschlossen. Die “Lücken” dazwischen sollten “evident” sein.
- Hierbei wird oftmals der Folgepfeil eingesetzt.
- Abschließend: Übung macht den Meister!