§2 Bewegungen

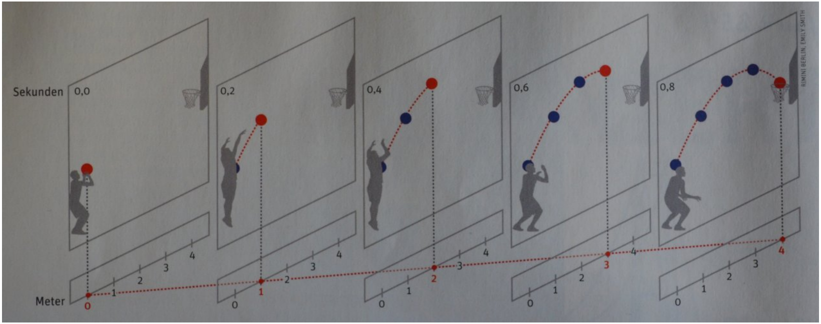
Bewegung im Raum

Wir wollen "Bewegungen" im Raum studieren.

Wir betrachten eine Abbildung von einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^3$:

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \,, \; t \mapsto \gamma(t)$$

Hier steht t wieder für die Zeit. Wir sprechen deshalb auch von einem **Zeitpunkt** $t^{(0)}$.


Sekunden
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
Meter
0
1
2
3
4
RIMINI BERLIN, EMILY SMITH

Bewegung im Raum

Wiederholung. Einen beliebigen Punkt im Raum bezeichnet man in der Regel mit (x, y, z) oder ähnlich, z.B. auch $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ etc.

Bewegung im Raum

Wiederholung. Einen beliebigen Punkt im Raum bezeichnet man in der Regel mit (x, y, z) oder ähnlich, z.B. auch $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ etc.

In diesem Sinne schreiben wir

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \ .$$

Bewegung im Raum

Wiederholung. Einen beliebigen Punkt im Raum bezeichnet man in der Regel mit (x, y, z) oder ähnlich, z.B. auch $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ etc.

In diesem Sinne schreiben wir

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \ .$$

Wir haben dann drei Funktionen:

$$\begin{array}{lcl} I \longrightarrow \mathbb{R} & , & t \mapsto x(t) \\ I \longrightarrow \mathbb{R} & , & t \mapsto y(t) \\ I \longrightarrow \mathbb{R} & , & t \mapsto z(t) \end{array}$$

Stetigkeit

Wir wollen definieren, wann γ in einem $t^{(0)} \in I$ stetig ist.

Wiederholung

Wir betrachten zuerst eine Funktion

$$a : I \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ t \mapsto a(t)\ .$$

Dann sind äquivalent:

a) (Folgenkriterium) Für jede Folge $(t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in I mit $t^{(n)} \longrightarrow t^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt auch $a(t^{(n)}) \longrightarrow a(t^{(0)})$ für $n \longrightarrow \infty$.

b) ($\varepsilon - \delta$-Kriterium) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$ für $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, heißt die Funktion a **stetig** an $t^{(0)}$.

Wiederholung

Die Aussage in b) lautet:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$ für $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Wiederholung

Die Aussage in b) lautet:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$ für $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Formal sieht das so aus:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in I : |t - t^{(0)}| \leq \delta \rightarrow |a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$$

Wiederholung

Die Aussage in b) lautet:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$ für $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Formal sieht das so aus:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in I : |t - t^{(0)}| \leq \delta \Longrightarrow |a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$$

Wiederholung

Die Aussage in b) lautet:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$ für $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Formal sieht das so aus:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in I : |t - t^{(0)}| \leq \delta \to |a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$$

Wiederholung

Die Aussage in b) lautet:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$ für $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Formal sieht das so aus:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in I : |t - t^{(0)}| \leq \delta \rightarrow |a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$$

Mit Mengen sieht das einfacher aus:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$a([t^{(0)} - \delta, t^{(0)} + \delta] \cap I) \subseteq [a(t^{(0)}) - \varepsilon, a(t^{(0)}) + \varepsilon]$.

Wiederholung

Die Aussage in b) lautet:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$ für $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Formal sieht das so aus:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in I : |t - t^{(0)}| \leq \delta \to |a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$$

Mit Mengen sieht das einfacher aus:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$a([t^{(0)} - \delta, t^{(0)} + \delta] \cap I) \subseteq [a(t^{(0)}) - \varepsilon, a(t^{(0)}) + \varepsilon]$.

D.h.:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $a(\overline{U}_\delta(t^{(0)}) \cap I) \subseteq \overline{U}_\varepsilon(a(t^{(0)}))$.

Wiederholung

Die Aussage in b) lautet:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$ für $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Formal sieht das so aus:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in I : |t - t^{(0)}| \leq \delta \to |a(t) - a(t^{(0)})| \leq \varepsilon$$

Mit Mengen sieht das einfacher aus:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$a([t^{(0)} - \delta, t^{(0)} + \delta] \cap I) \subseteq [a(t^{(0)}) - \varepsilon, a(t^{(0)}) + \varepsilon]$.

D.h.:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $a(\overline{U}_\delta(t^{(0)}) \cap I) \subseteq \overline{U}_\varepsilon(a(t^{(0)}))$.

Formal:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : a(\overline{U}_\delta(t^{(0)}) \cap I) \subseteq \overline{U}_\varepsilon(a(t^{(0)}))$$

Stetigkeit

Satz. Sei

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \ t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

gegeben und sei $t^{(0)} \in I$. Dann sind äquivalent:

a) Die Funktionen $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$, $t \mapsto z(t)$ sind stetig in $t^{(0)}$.

b) Für jede Folge $(t^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ in I mit $t^{(n)} \longrightarrow t^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt $\gamma(t^{(n)}) \longrightarrow \gamma(t^{(0)})$ für $n \longrightarrow \infty$.

c) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\| \leq \varepsilon$ für allle $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Stetigkeit

Beweis von a) $\leftrightarrow$ b)

a) lautet:

Die Funktionen $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$, $t \mapsto z(t)$ sind stetig in $t^{(0)}$.

Stetigkeit

Beweis von a) $\leftrightarrow$ b)

a) lautet:

Die Funktionen $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$, $t \mapsto z(t)$ sind stetig in $t^{(0)}$.

Dies ist äquivalent zu:

Für jede Folge $(t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^+}$ in I mit $t^{(n)} \longrightarrow t^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt:

$$x(t^{(n)}) \longrightarrow x(t^{(0)}),$$

Stetigkeit

Beweis von a) $\leftrightarrow$ b)

a) lautet:

Die Funktionen $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$, $t \mapsto z(t)$ sind stetig in $t^{(0)}$.

Dies ist äquivalent zu:

Für jede Folge $(t^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ in I mit $t^{(n)} \longrightarrow t^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt:

$$x(t^{(n)}) \longrightarrow x(t^{(0)}), y(t^{(n)}) \longrightarrow y(t^{(0)}),$$

Stetigkeit

Beweis von a) $\leftrightarrow$ b)

a) lautet:

Die Funktionen $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$, $t \mapsto z(t)$ sind stetig in $t^{(0)}$.

Dies ist äquivalent zu:

Für jede Folge $(t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^+}$ in I mit $t^{(n)} \longrightarrow t^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt:

$$x(t^{(n)}) \longrightarrow x(t^{(0)}), y(t^{(n)}) \longrightarrow y(t^{(0)}), z(t^{(n)}) \longrightarrow z(t^{(0)}) \ .$$

Stetigkeit

Beweis von a) $\leftrightarrow$ b)

a) lautet:

Die Funktionen $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$, $t \mapsto z(t)$ sind stetig in $t^{(0)}$.

Dies ist äquivalent zu:

Für jede Folge $(t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^+}$ in I mit $t^{(n)} \longrightarrow t^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt:

$$x(t^{(n)}) \longrightarrow x(t^{(0)}), y(t^{(n)}) \longrightarrow y(t^{(0)}), z(t^{(n)}) \longrightarrow z(t^{(0)}) \ .$$

Dies ist äquivalent zu:

Für jede Folge $(t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^+}$ in I mit $t^{(n)} \longrightarrow t^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt

$$(x(t^{(n)}), y(t^{(n)}), z(t^{(n)})) \longrightarrow (x(t^{(0)}), y(t^{(0)}), z(t^{(0)})) \ .$$

Stetigkeit

Satz. Sei

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \ t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

gegeben und sei $t^{(0)} \in I$. Dann sind äquivalent:

a) Die Funktionen $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$, $t \mapsto z(t)$ sind stetig in $t^{(0)}$.

b) Für jede Folge $(t^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ in I mit $t^{(n)} \longrightarrow t^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt $\gamma(t^{(n)}) \longrightarrow \gamma(t^{(0)})$ für $n \longrightarrow \infty$.

c) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\| \leq \varepsilon$ für alle $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Äquivalenz von b) und c) ohne Beweis.

Stetigkeit

Die Aussage in c) lautet:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\| \leq \varepsilon$ für allle $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Stetigkeit

Die Aussage in c) lautet:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\| \leq \varepsilon$ für allle $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Formal sieht das so aus:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in I : |t - t^{(0)}| \leq \delta \rightarrow \|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\| \leq \varepsilon$$

Stetigkeit

Die Aussage in c) lautet:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\| \leq \varepsilon$ für allle $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Formal sieht das so aus:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in I : |t - t^{(0)}| \leq \delta \Longrightarrow \|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\| \leq \varepsilon$$

Stetigkeit

Die Aussage in c) lautet:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\| \leq \varepsilon$ für allle $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Formal sieht das so aus:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in I : |t - t^{(0)}| \leq \delta \to \|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\| \leq \varepsilon$$

Stetigkeit

Die Aussage in c) lautet:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\| \leq \varepsilon$ für allle $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Formal sieht das so aus:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in I : |t - t^{(0)}| \leq \delta \to \|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\| \leq \varepsilon$$

Mit Mengen:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\gamma(\overline{U}_\delta(t^{(0)}) \cap I) \subseteq \overline{U}_\varepsilon(\gamma(t^{(0)}))$.

Stetigkeit

Die Aussage in c) lautet:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\| \leq \varepsilon$ für allle $t \in I$ mit $|t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Formal sieht das so aus:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in I : |t - t^{(0)}| \leq \delta \to \|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\| \leq \varepsilon$$

Mit Mengen:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\gamma(\overline{U}_\delta(t^{(0)}) \cap I) \subseteq \overline{U}_\varepsilon(\gamma(t^{(0)}))$.

Formal:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \gamma(\overline{U}_\delta(t^{(0)}) \cap I) \subseteq \overline{U}_\varepsilon(\gamma(t^{(0)}))$$

Stetigkeit

Definition. Wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, ist die Abbildung γ ist **stetig im Zeitpunt** $t^{(0)}$.

Stetigkeit

Definition. Wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, ist die Abbildung γ ist **stetig im Zeitpunt** $t^{(0)}$.

Definition. Wenn die Abbildung in allen Zeitpunkten stetig ist, heißt sie **stetig**.

Stetigkeit

Definition. Wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, ist die Abbildung γ ist **stetig im Zeitpunt** $t^{(0)}$.

Definition. Wenn die Abbildung in allen Zeitpunkten stetig ist, heißt sie **stetig**.

Definition. Wenn γ stetig ist, sprechen wir von einer **Bewegung**.

Stetigkeit

Definition. Wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, ist die Abbildung γ ist **stetig im Zeitpunt** $t^{(0)}$.

Definition. Wenn die Abbildung in allen Zeitpunkten stetig ist, heißt sie **stetig**.

Definition. Wenn γ stetig ist, sprechen wir von einer **Bewegung**.

[Der normale Name in der Mathematik ist „**Weg**“, das erscheint mir aber nicht so intuitiv.]

Stetigkeit

Definition. Wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, ist die Abbildung γ ist **stetig im Zeitpunt** $t^{(0)}$.

Definition. Wenn die Abbildung in allen Zeitpunkten stetig ist, heißt sie **stetig**.

Definition. Wenn γ stetig ist, sprechen wir von einer **Bewegung**.

[Der normale Name in der Mathematik ist „**Weg**“, das erscheint mir aber nicht so intuitiv.]

Desweiteren spricht man auch von einer **parametrisierten Kurve**.

Bewegung in der Ebene

Oftmals betrachtet man auch Bewegungen in der Ebene:

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \ .$$

Wir haben dann:

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R} \quad , \ t \mapsto x(t) \\ I &\longrightarrow \mathbb{R} \quad , \ t \mapsto y(t) \end{aligned}$$

Bewegung in der Ebene

Eine Bewegung $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ in der Ebene kann graphisch durch die Menge

$$\{\gamma(t) = (x(t), y(t)) \mid t \in I\}$$

veranschaulicht werden.

Bewegung in der Ebene

Eine Bewegung $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ in der Ebene kann graphisch durch die Menge

$$\{\gamma(t) = (x(t), y(t)) \mid t \in I\}$$

veranschaulicht werden.

Achtung. So ein Schaubild ist nicht dasselbe wie das Schaubild einer Funktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$!

Man kann aber zu einer Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R} \, , x \mapsto f(x) = y$$

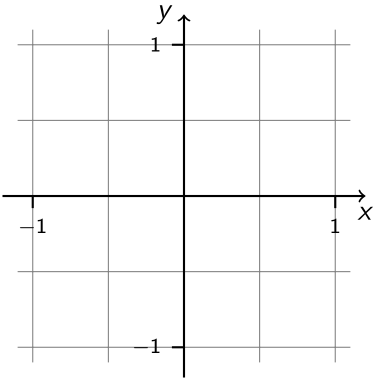
die Bewegung

$$I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \, , t \mapsto (x(t), y(t)) := (t, f(t))$$

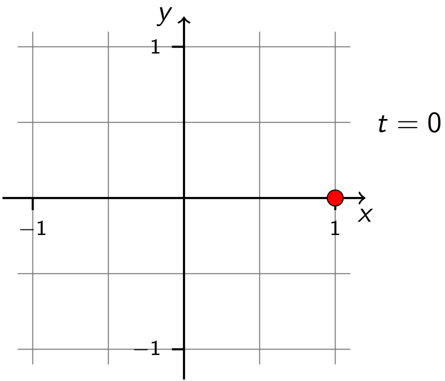
betrachten. Der Graph von f ist dann genau die Menge oben.

Beispiel

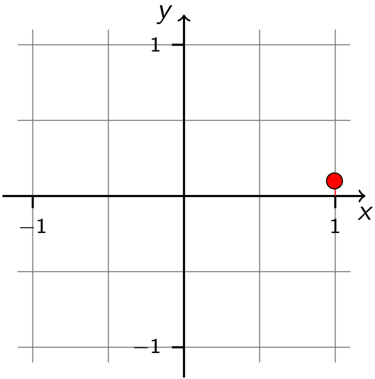
Wir betrachten die Kreisbewegung auf $I = [0, 2\pi]$:
$I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.



Wir betrachten die Kreisbewegung auf $I = [0, 2\pi]$:
$I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.

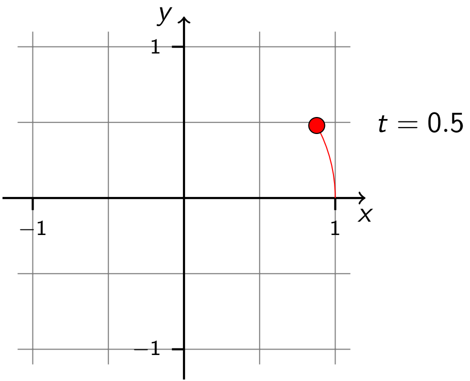


Wir betrachten die Kreisbewegung auf $I = [0, 2\pi]$:
$I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.

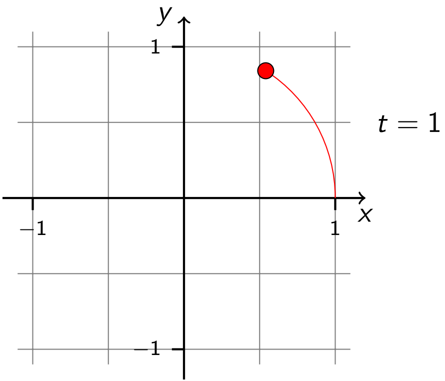


$t = 0.1$

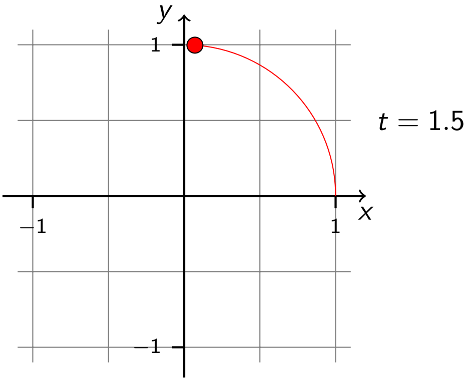
Wir betrachten die Kreisbewegung auf $I = [0, 2\pi]$:
$I \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.



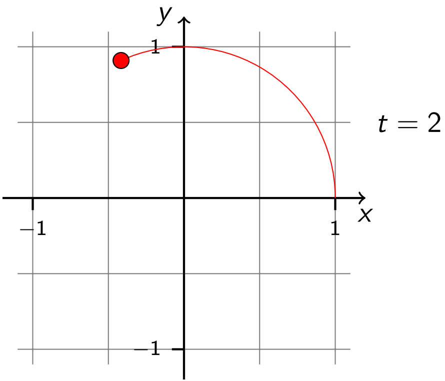
Wir betrachten die Kreisbewegung auf $I = [0, 2\pi]$:
$I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.



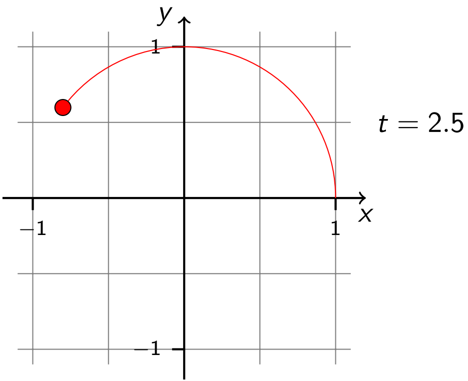
Wir betrachten die Kreisbewegung auf $I = [0, 2\pi]$:
$I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.



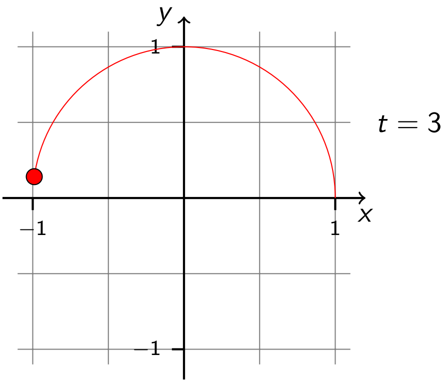
Wir betrachten die Kreisbewegung auf $I = [0, 2\pi]$:
$I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.



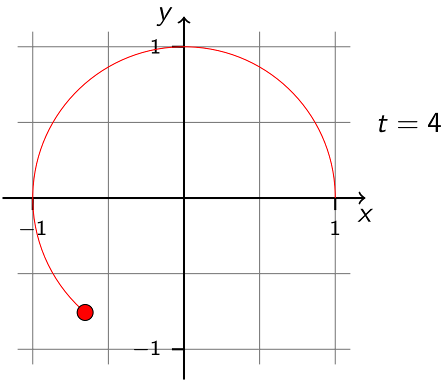
Wir betrachten die Kreisbewegung auf $I = [0, 2\pi]$:
$I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.



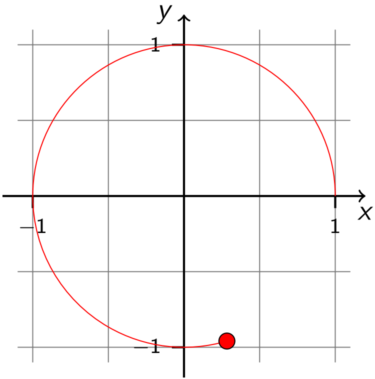
Wir betrachten die Kreisbewegung auf $I = [0, 2\pi]$:
$I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.



Wir betrachten die Kreisbewegung auf $I = [0, 2\pi]$:
$I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.

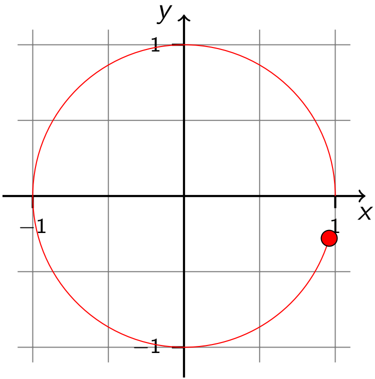


Wir betrachten die Kreisbewegung auf $I = [0, 2\pi]$:
$I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.



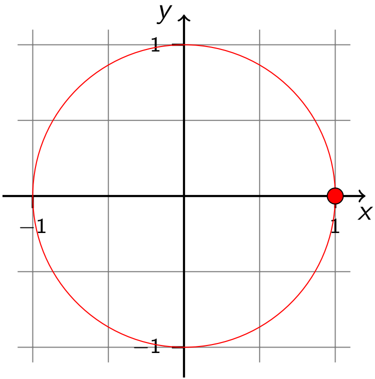
$t = 5$

Wir betrachten die Kreisbewegung auf $I = [0, 2\pi]$:
$I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.



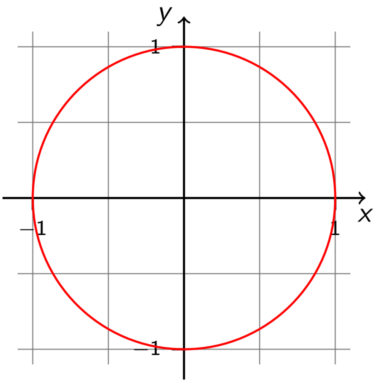
$t = 6$

Wir betrachten die Kreisbewegung auf $I = [0, 2\pi]$:
$I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.

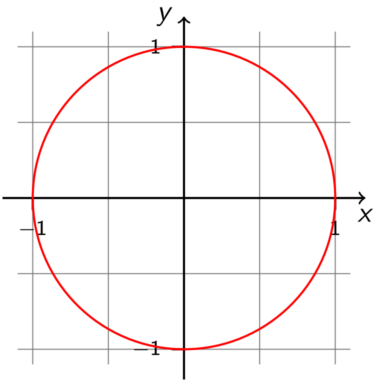


$t = 2\pi \approx 6{,}2$

Die Menge $\{\gamma(t) \mid t \in I\}$ ist also ein Kreis.

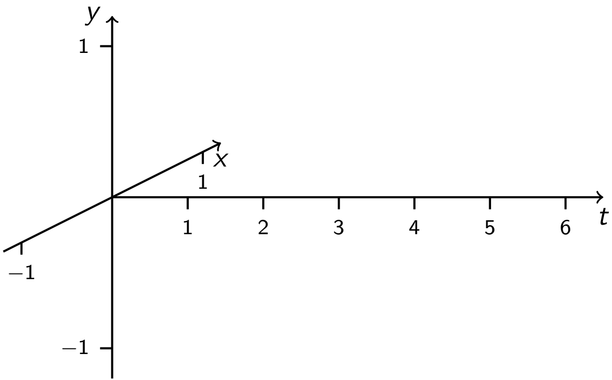


Die Menge $\{\gamma(t) \mid t \in I\}$ ist also ein Kreis. Durch diese Darstellung geht aber der zeitliche Aspekt verloren.

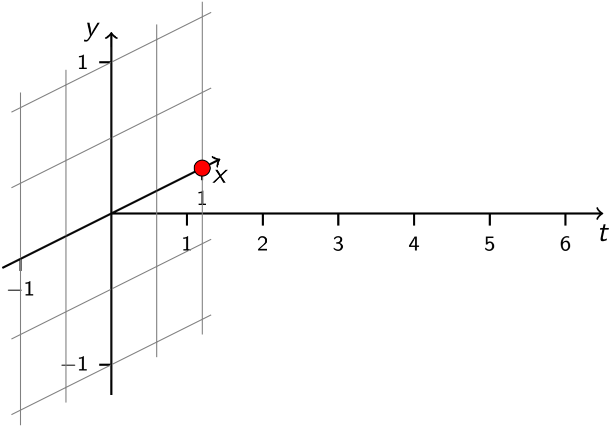


Wir können die Zeit t auf eine neue Achse abtragen:

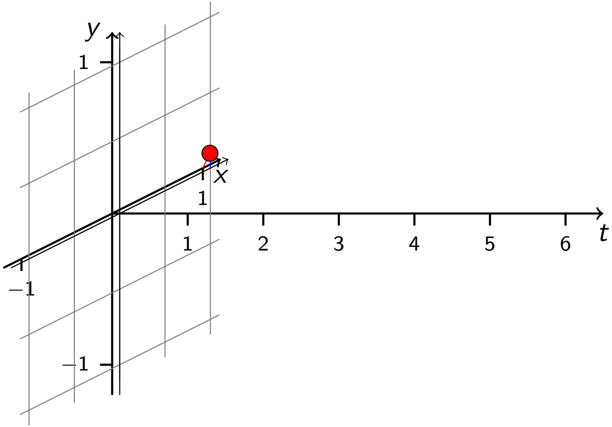
Und können jetzt jedem Zeitpunkt t den Ort auf der x-y-Ebene zuordnen.



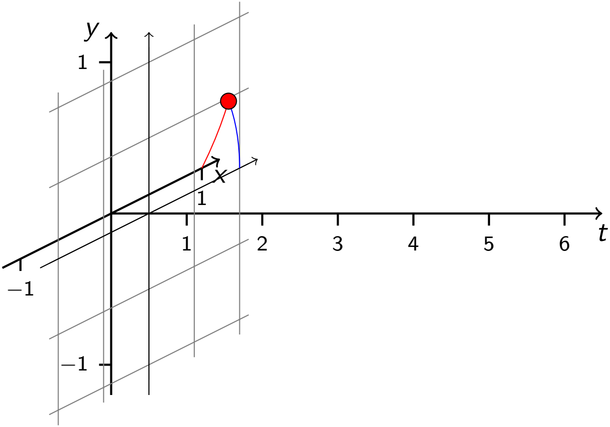
Und können jetzt jedem Zeitpunkt t den Ort auf der x-y-Ebene zuordnen.



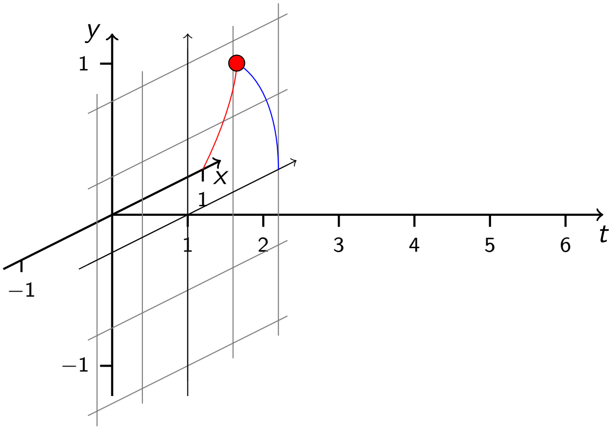
Und können jetzt jedem Zeitpunkt t
den Ort auf der x-y-Ebene zuordnen.



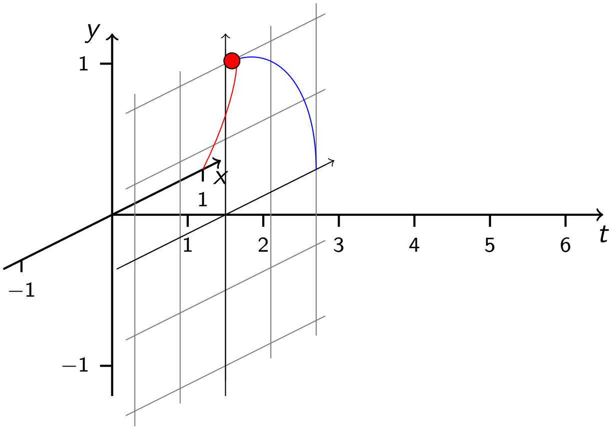
Und können jetzt jedem Zeitpunkt t
den Ort auf der x-y-Ebene zuordnen.



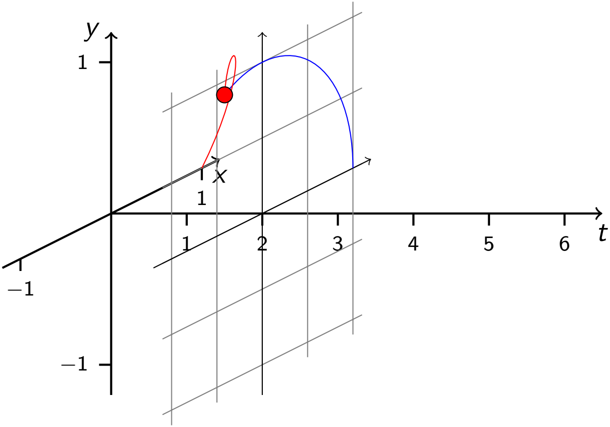
Und können jetzt jedem Zeitpunkt t
den Ort auf der x-y-Ebene zuordnen.



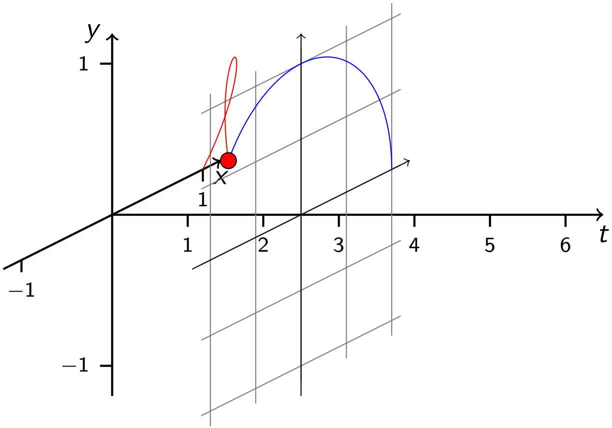
Und können jetzt jedem Zeitpunkt t den Ort auf der x-y-Ebene zuordnen.



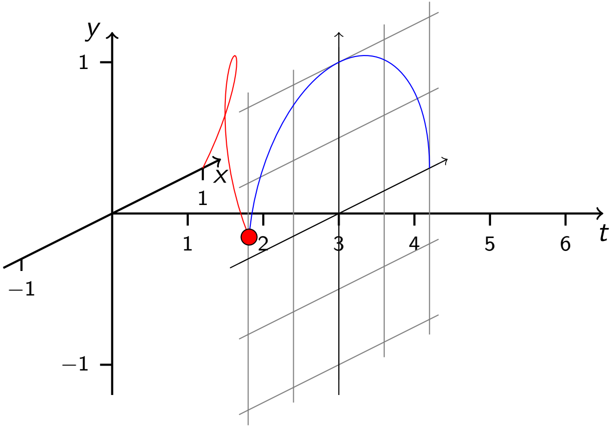
Und können jetzt jedem Zeitpunkt t den Ort auf der x-y-Ebene zuordnen.



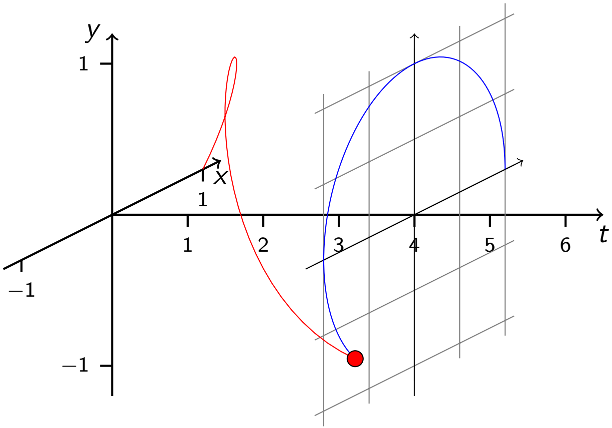
Und können jetzt jedem Zeitpunkt t
den Ort auf der x-y-Ebene zuordnen.



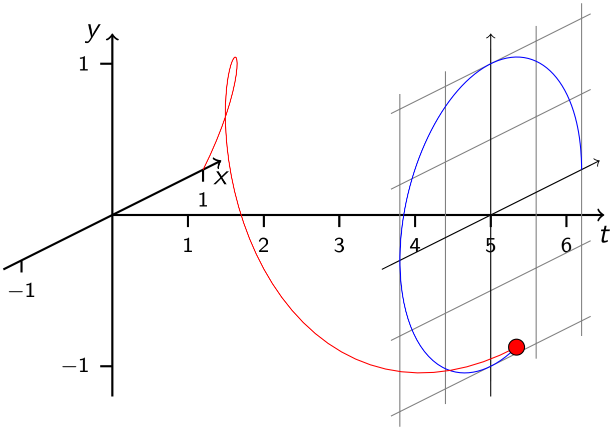
Und können jetzt jedem Zeitpunkt t den Ort auf der x-y-Ebene zuordnen.



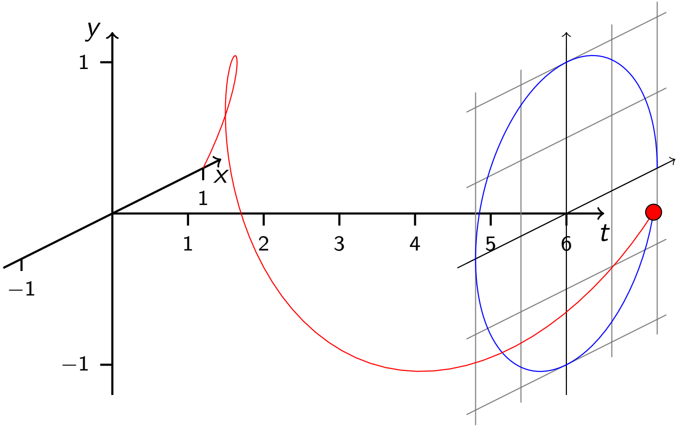
Und können jetzt jedem Zeitpunkt t
den Ort auf der x-y-Ebene zuordnen.



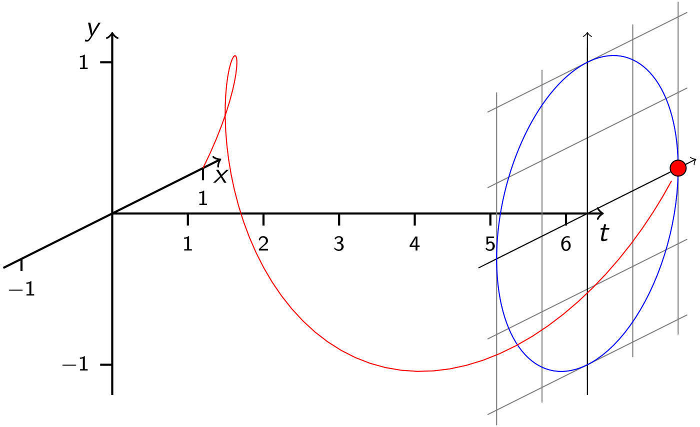
Und können jetzt jedem Zeitpunkt t
den Ort auf der x-y-Ebene zuordnen.



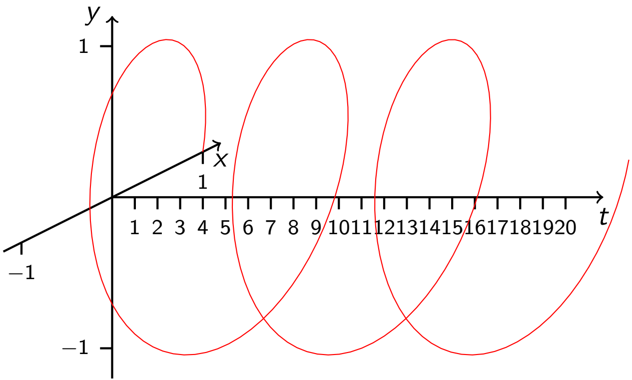
Und können jetzt jedem Zeitpunkt t
den Ort auf der x-y-Ebene zuordnen.



Und können jetzt jedem Zeitpunkt t den Ort auf der x-y-Ebene zuordnen.



Wir erhalten eine Schraubenlinie.



Frage

Was ist eigentlich $\sin(t)$ und $\cos(t)$? Wie sind diese Funktionen definiert?

Frage

Was ist eigentlich $\sin(t)$ und $\cos(t)$? Wie sind diese Funktionen definiert?

Hierfür brauchen wir noch etwas mehr Theorie.

“Bewegung” im $\mathbb{R}^d$

Man kann auch Abbildungen

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

betrachten. Man schreibt dann oft

$$\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t)) \, .$$

Dann hat man also die Abbildungen

$$\begin{array}{lll} I \longrightarrow \mathbb{R} & , & t \mapsto x_1(t) \\ I \longrightarrow \mathbb{R} & , & t \mapsto x_2(t) \\ \quad\vdots & & \quad\vdots \\ I \longrightarrow \mathbb{R} & , & t \mapsto x_d(t) \, . \end{array}$$

Stetigkeit

Man kann den Begriff der Stetigkeit direkt auf

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^d \ , \ t \mapsto \gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t))$$

übertragen.

Merke. γ ist genau dann stetig in $t^{(0)} \in I$, wenn

- Die Abbildung $t \mapsto x_1(t)$ stetig in $t^{(0)}$ ist
- $\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\vdots$
- Die Abbildung $t \mapsto x_d(t)$ stetig in $t^{(0)}$ ist.

Praktisches Beispiel

Ein Stromversorger hat d Kraftwerkblöcke $K_1, \ldots, K_d$ (wie im Beispiel oben).

Für einen gegebenen Zeitpunkt t und $i = 1, \ldots, d$ sei $x_i(t)$ die Leistung des Kraftwerkblocks K_i.

Beispielsweise:

x_1(20.4.2015 um 11:00) = 100 Megawatt.

x_2(20.4.2015 um 11:00) = 30 Megawatt.

x_3(20.4.2015 um 11:00) = 0 Megawatt.

$\vdots$

Praktisches Beispiel

Wenn wir t in einem bestimmen Zeitintervall variieren und physikalische Einheiten wählen (z.B. Stunde und Megawatt), können wir dies durch eine Abbildung

$$I \longrightarrow \mathbb{R}^d \ , \ t \mapsto (x_1(t), \ldots, x_d(t))$$

beschreiben.

Praktisches Beispiel

Wenn wir t in einem bestimmen Zeitintervall variieren und physikalische Einheiten wählen (z.B. Stunde und Megawatt), können wir dies durch eine Abbildung

$$I \longrightarrow \mathbb{R}^d \ , \ t \mapsto (x_1(t), \dots, x_d(t))$$

beschreiben.

Bemerkung. Man kann davon ausgehen, dass die Abbildung stetig ist. Sie ist somit nach unserer mathematischen Definition eine Bewegung. Aber sie beschreibt natürlich keine Bewegung (sondern physikalische Leistungen). Es ist ein allgemeines Phänomen, dass mathematisches Begriffe in bestimmten Anwendungen gut passen und in anderen weniger gut bis gar nicht. Das ist unvermeidbar.

Grenzwerte

Wir betrachten der Einfachheit halber zunächst Abbildungen nach $\mathbb{R}^3$.

Grenzwerte

Satz. Sei

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \ t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \ ,$$

sei $t^{(0)} \in I$ und sei $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) \in \mathbb{R}^3$. Dann sind äquivalent:

a) $x(t) \longrightarrow x^{(0)} \ , \ y(t) \longrightarrow y^{(0)} \ , \ z(t) \longrightarrow z^{(0)}$ für $t \longrightarrow t^{(0)}$.

b) Für jede Folge $(t^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ in $I \backslash \{t^{(0)}\}$ mit $t^{(n)} \longrightarrow t^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt $\gamma(t^{(n)}) \longrightarrow (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ für $n \longrightarrow \infty$.

c) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma(t) - (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})\| \leq \varepsilon$ für allle $t \in I$ mit $0 < |t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Grenzwerte

Satz. Sei

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^d \ , \ t \mapsto \gamma(t) = \underline{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t)) \ ,$$

sei $t^{(0)} \in I$ und sei $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^d$. Dann sind äquivalent:

a) $x_1(t) \longrightarrow x_1^{(0)} \ , \ldots , \ x_d(t) \longrightarrow x_d^{(0)}$ für $t \longrightarrow t^{(0)}$.

b) Für jede Folge $(t^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^+}$ in $I \backslash \{t^{(0)}\}$ mit $t^{(n)} \longrightarrow t^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt $\gamma(t^{(n)}) \longrightarrow \underline{x}^{(0)}$ für $n \longrightarrow \infty$.

c) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|\gamma(t) - \underline{x}^{(0)}\| \leq \varepsilon$ für allle $t \in I$ mit $0 < |t - t^{(0)}| \leq \delta$.

Grenzwert

Definition. Wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, sagen / schreiben wir:

$$\text{Für } t \text{ gegen } t^{(0)} \text{ strebt } \gamma(t) \text{ gegen } \underline{x}^{(0)}.$$

$$\gamma(t) \longrightarrow \underline{x}^{(0)} \text{ für } t \longrightarrow t^{(0)}$$

Grenzwert

Definition. Wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, sagen / schreiben wir:

Für t gegen $t^{(0)}$ strebt $\gamma(t)$ gegen $\underline{x}^{(0)}$.

$$\gamma(t) \longrightarrow \underline{x}^{(0)} \text{ für } t \longrightarrow t^{(0)}$$

Wir nennen dann $\underline{x}^{(0)}$ den **Grenzwert** von γ an $t^{(0)}$.

$$\lim_{t \longrightarrow t^{(0)}} \gamma(t) = \underline{x}^{(0)}$$

Die Ableitung

Sei nach wie vor $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Definition. Die Abbildung γ heißt **differenzierbar** im Zeitpunkt $t^{(0)}$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \longrightarrow t^{(0)}} \frac{\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})}{t - t^{(0)}} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\gamma(t^{(0)} + h) - \gamma(t^{(0)})}{h} ,$$

exisitiert. Wir nennen diesen Grenzwert dann den **Differentialquotient** im Zeitpunkt $t^{(0)}$ und bezeichnen ihn mit $\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t^{(0)}}$.

Die Ableitung

Definition. Die Abbildung γ heißt **differenzierbar**, wenn sie zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ differenzierbar ist. Die Funktion

$$I \longrightarrow \mathbb{R}^d\ ,\ t^{(0)} \mapsto \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t^{(0)}}$$

nennen wir dann die **Ableitung** von γ (nach t). Wir bezeichnen sie mit $\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}$.

Die Ableitung

Definition. Die Abbildung γ heißt **differenzierbar**, wenn sie zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ differenzierbar ist. Die Funktion

$$I \longrightarrow \mathbb{R}^d \ , \ t^{(0)} \mapsto \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t^{(0)}}$$

nennen wir dann die **Ableitung** von γ (nach t). Wir bezeichnen sie mit $\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}$.

Der Differentialquotient im Zeitpunkt $t^{(0)}$ heißt dann auch die **Ableitung im Zeitpunkt** $t^{(0)}$.

Die Ableitung

Die Ableitung einer Bewegung zeigt in Richtung der Bewegung.

Die Ableitung

Die Ableitung einer Bewegung zeigt in Richtung der Bewegung.

Wir können Sie als **Geschwindigkeitsvektor** verstehen.

Die Ableitung

Die Ableitung einer Bewegung zeigt in Richtung der Bewegung.

Wir können Sie als **Geschwindigkeitsvektor** verstehen.

In diesem Sinne schreiben wir sie immer als Vektor.

Die Ableitung

Im $\mathbb{R}^3$ haben wir dann also

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} .$$

Die Ableitung

Beispiel

$$\gamma(t) := (t^2 + 1, e^{t^2}, t \cdot e^t)$$

mit $D_\gamma = \mathbb{R}$.

Die Ableitung

Beispiel

$$\gamma(t) := (t^2 + 1, e^{t^2}, t \cdot e^t)$$

mit $D_\gamma = \mathbb{R}$.

Dann ist

$$x(t) = t^2 + 1 \ , \ y(t) = e^{t^2} \ , \ z(t) = t \cdot e^t \ ,$$

Die Ableitung

Beispiel

$$\gamma(t) := (t^2 + 1, e^{t^2}, t \cdot e^t)$$

mit $D_\gamma = \mathbb{R}$.

Dann ist

$$x(t) = t^2 + 1\ ,\ y(t) = e^{t^2}\ ,\ z(t) = t \cdot e^t\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} =$$

Die Ableitung

Beispiel

$$\gamma(t) := (t^2 + 1, e^{t^2}, t \cdot e^t)$$

mit $D_\gamma = \mathbb{R}$.

Dann ist

$$x(t) = t^2 + 1\ ,\ y(t) = e^{t^2}\ ,\ z(t) = t \cdot e^t\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Die Ableitung

Beispiel

$$\gamma(t) := (t^2 + 1, e^{t^2}, t \cdot e^t)$$

mit $D_\gamma = \mathbb{R}$.

Dann ist

$$x(t) = t^2 + 1\ ,\ y(t) = e^{t^2}\ ,\ z(t) = t \cdot e^t\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Die Ableitung

Beispiel

$$\gamma(t) := (t^2 + 1, e^{t^2}, t \cdot e^t)$$

mit $D_\gamma = \mathbb{R}$.

Dann ist

$$x(t) = t^2 + 1\ ,\ y(t) = e^{t^2}\ ,\ z(t) = t \cdot e^t\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$$

Die Ableitung

Beispiel

$$\gamma(t) := (t^2 + 1, e^{t^2}, t \cdot e^t)$$

mit $D_\gamma = \mathbb{R}$.

Dann ist

$$x(t) = t^2 + 1\ ,\ \ y(t) = e^{t^2}\ ,\ \ z(t) = t \cdot e^t\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} 2t \\ \\ \\ \end{matrix} \right.$$

Die Ableitung

Beispiel

$$\gamma(t) := (t^2 + 1, e^{t^2}, t \cdot e^t)$$

mit $D_\gamma = \mathbb{R}$.

Dann ist

$$x(t) = t^2 + 1\ ,\ y(t) = e^{t^2}\ ,\ z(t) = t \cdot e^t\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} 2t \\ e^{t^2} \cdot 2t \\ \end{matrix} \right.$$

Die Ableitung

Beispiel

$$\gamma(t) := (t^2 + 1, e^{t^2}, t \cdot e^t)$$

mit $D_\gamma = \mathbb{R}$.

Dann ist

$$x(t) = t^2 + 1\ ,\ \ y(t) = e^{t^2}\ ,\ \ z(t) = t \cdot e^t\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ e^{t^2} \cdot 2t \\ e^t + t \cdot e^t \end{pmatrix}$$

Die Ableitung

Beispiel

$$\gamma(t) := (t^2+1, e^{t^2}, t \cdot e^t)$$

mit $D_\gamma = \mathbb{R}$.

Dann ist

$$x(t) = t^2 + 1 \ , \ y(t) = e^{t^2} \ , \ z(t) = t \cdot e^t \ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ e^{t^2} \cdot 2t \\ e^t + t \cdot e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \cdot e^{t^2} \\ (1+t) \cdot e^t \end{pmatrix} \ .$$

Die Ableitung

Entsprechend im $\mathbb{R}^d$: Für

$$\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t)) \; :$$

Die Ableitung

Entsprechend im $\mathbb{R}^d$: Für

$$\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t)) \ :$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_d(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} \ .$$

Die Ableitung

Notation. Wie schon in Kapitel I, §3 gesagt, verwendet man normalerweise bei Ableitung "nach der Zeit" **nicht** die naheliegende Notation $\gamma' = \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}$.

Die Ableitung

Notation. Wie schon in Kapitel I, §3 gesagt, verwendet man normalerweise bei Ableitung "nach der Zeit" **nicht** die naheliegende Notation $\gamma' = \frac{d\gamma(t)}{dt}$.

Stattdessen verwendet man die auf Newton zurückgehende Notation

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

(im $\mathbb{R}^3$)

Die Ableitung

Notation. Wie schon in Kapitel I, §3 gesagt, verwendet man normalerweise bei Ableitung "nach der Zeit" **nicht** die naheliegende Notation $\gamma' = \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}$.

Stattdessen verwendet man die auf Newton zurückgehende Notation

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

(im $\mathbb{R}^3$) oder

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_d \end{pmatrix}$$

(im $\mathbb{R}^d$).

Die Ableitung

Notation. Wie schon in Kapitel I, §3 gesagt, verwendet man normalerweise bei Ableitung “nach der Zeit” **nicht** die naheliegende Notation $\gamma' = \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}$.

Stattdessen verwendet man die auf Newton zurückgehende Notation

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

(im $\mathbb{R}^3$) oder

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_d \end{pmatrix}$$

(im $\mathbb{R}^d$).

Die Geschwindigkeit

Es sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine differenzierbare Bewegung.

Der **Geschwindigkeitsvektor** zum Zeitpunkt $t^{(0)}$ ist dasselbe wie die Ableitung zu diesem Zeitpunkt.

Die Geschwindigkeit

Es sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine differenzierbare Bewegung.

Der **Geschwindigkeitsvektor** zum Zeitpunkt $t^{(0)}$ ist dasselbe wie die Ableitung zu diesem Zeitpunkt.

Die **(skalare) Geschwindigkeit** zum Zeitpunkt $t^{(0)}$ ist die Länge dieses Vektors: $\left\|\dot{\gamma}\left(t^{(0)}\right)\right\|$.

Die Geschwindigkeit

Es sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine differenzierbare Bewegung.

Der **Geschwindigkeitsvektor** zum Zeitpunkt $t^{(0)}$ ist dasselbe wie die Ableitung zu diesem Zeitpunkt.

Die **(skalare) Geschwindigkeit** zum Zeitpunkt $t^{(0)}$ ist die Länge dieses Vektors: $\left\|\dot{\gamma}(t^{(0)})\right\|$.

Alternative Beschreibung:

$$\left\|\dot{\gamma}(t^{(0)})\right\| = \lim_{t \longrightarrow t^{(0)}} \frac{\left\|\gamma(t) - \gamma(t^{(0)})\right\|}{\left|t - t^{(0)}\right|}$$

Die Länge

Es sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine Bewegung.

Wir wollen die **Länge** des von γ zurückgelegten Weges definieren.

Die Länge

Es sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine Bewegung.

Wir wollen die **Länge** des von γ zurückgelegten Weges definieren.

Die Definition sollte erfüllen:

Die Länge

1. Wenn γ eine Strecke von P nach Q durchläuft (ohne irgendwo umzudrehen), ist die Länge gleich der Distanz von P nach Q.

Die Länge

1. Wenn γ eine Strecke von P nach Q durchläuft (ohne irgendwo umzudrehen), ist die Länge gleich der Distanz von P nach Q.
2. Wenn γ nacheinander Strecken von $P^{(1)}$ nach $P^{(2)}$, nach $P^{(3)}$, $\dots$, nach $P^{(k)}$ durchkäuft, ist die Länge des gesamten zurückgelegten Weges die Summe dieser Längen.
   [Eine Bewegung wie eben beschrieben nennt man einen **Polygonzug**.]

Die Länge

1. Wenn γ eine Strecke von P nach Q durchläuft (ohne irgendwo umzudrehen), ist die Länge gleich der Distanz von P nach Q.
2. Wenn γ nacheinander Strecken von $P^{(1)}$ nach $P^{(2)}$, nach $P^{(3)}$, $\dots$, nach $P^{(k)}$ durchkäuft, ist die Länge des gesamten zurückgelegten Weges die Summe dieser Längen.
   [Eine Bewegung wie eben beschrieben nennt man einen **Polygonzug**.]
3. Es sei $a = t^{(0)} < t^{(1)} < \cdots < t^{(k)} = b$ beliebig. Dann ist die Länge des zurückgelegten Weges mindestens zu groß wie die Länge des Polygonzuges von $\gamma(a)$ nach $\gamma(t^{(1)})$ nach $\gamma(t^{(2)})$ nach $\dots$ nach $\gamma(t^{(k)})$.

Die Länge

1. Wenn γ eine Strecke von P nach Q durchläuft (ohne irgendwo umzudrehen), ist die Länge gleich der Distanz von P nach Q.
2. Wenn γ nacheinander Strecken von $P^{(1)}$ nach $P^{(2)}$, nach $P^{(3)}$, ..., nach $P^{(k)}$ durchkäuft, ist die Länge des gesamten zurückgelegten Weges die Summe dieser Längen.
   [Eine Bewegung wie eben beschrieben nennt man einen **Polygonzug**.]
3. Es sei $a = t^{(0)} < t^{(1)} < \cdots < t^{(k)} = b$ beliebig. Dann ist die Länge des zurückgelegten Weges mindestens zu groß wie die Länge des Polygonzuges von $\gamma(a)$ nach $\gamma(t^{(1)})$ nach $\gamma(t^{(2)})$ nach ... nach $\gamma(t^{(k)})$.
4. Man kann die Länge des zurückgelegten Weges durch solche Polygonzüge beliebig genau approximieren.

Die Länge

Diese Bedingungen sind genau durch die folgende Definition erfasst.

Definition. Die **Länge des von γ zurückgelegten Weges** (kurz: die **Länge von γ**) ist

$$\sup\left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \gamma(t^{(i)}) - \gamma(t^{(i+1)}) \right\| \mid k \in \mathbb{N}\,, a = t^{(0)} < t^{(1)} < \cdots < t^{(k)} = b \right\}$$

Bezeichnung: $L(\gamma)$.

Die Länge

Die Bewegung γ geht von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}^d$.

"Die Zeit läuft von a bis b."

Die Länge

Die Bewegung γ geht von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}^d$.

"Die Zeit läuft von a bis b."

Intuitiv erwartet man, dass $L(\gamma)$ immer endlich (nicht ∞) ist.

"In endlicher Zeit kann man auch nur eine endliche Distanz zurücklegen."

Die Länge

Die Bewegung γ geht von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}^d$.

"Die Zeit läuft von a bis b."

Intuitiv erwartet man, dass $L(\gamma)$ immer endlich (nicht ∞) ist.

"In endlicher Zeit kann man auch nur eine endliche Distanz zurücklegen."

Das stimmt aber nicht: Es gibt Bewegungen, die so verrückt hin- und hergehen, dass die Länge ∞ ist!

Die Länge

Die Bewegung γ geht von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}^d$.

"Die Zeit läuft von a bis b."

Intuitiv erwartet man, dass $L(\gamma)$ immer endlich (nicht ∞) ist.

"In endlicher Zeit kann man auch nur eine endliche Distanz zurücklegen."

Das stimmt aber nicht: Es gibt Bewegungen, die so verrückt hin- und hergehen, dass die Länge ∞ ist!

Solche Bewegungen benutzt man zur Modellierung von Börsenkursen.

Die Länge

Die Bewegung γ geht von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}^d$.

"Die Zeit läuft von a bis b."

Intuitiv erwartet man, dass $L(\gamma)$ immer endlich (nicht ∞) ist.

"In endlicher Zeit kann man auch nur eine endliche Distanz zurücklegen."

Das stimmt aber nicht: Es gibt Bewegungen, die so verrückt hin- und hergehen, dass die Länge ∞ ist!

Solche Bewegungen benutzt man zur Modellierung von Börsenkursen.

[Aber das betrachten wir nicht.]

Die Längenfunktion

Voraussetzung. Sei von nun an γ eine Bewegung auf $I = [a, b]$ mit endlicher Länge.

Wir bezeichnen mit $s(t)$ die Länge von $\gamma|_{[a,t]} : [a, t] \longrightarrow \mathbb{R}^d$.

Die Längenfunktion

Voraussetzung. Sei von nun an γ eine Bewegung auf $I = [a, b]$ mit endlicher Länge.

Wir bezeichnen mit $s(t)$ die Länge von $\gamma|_{[a,t]} : [a, t] \longrightarrow \mathbb{R}^d$.

Satz. Die **Längenfunktion**

$$s : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \ , \ \ t \mapsto s(t)$$

ist stetig und monoton wachsend.

Zeit und Länge

Mehr Voraussetzungen. Die Bewergung γ sei auf $[0, b]$ definiert, differenzierbar und die Ableitung stetig.

Zeit und Länge

Mehr Voraussetzungen. Die Bewergung γ sei auf $[0, b]$ definiert, differenzierbar und die Ableitung stetig.

Satz

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$

Zeit und Länge

Mehr Voraussetzungen. Die Bewergung γ sei auf $[0, b]$ definiert, differenzierbar und die Ableitung stetig.

Satz

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$

Korollar. Es sind äquivalent:

a) die Geschwindigkeit von γ ist konstant 1:

$$\forall t \in [0, b] : \|\dot{\gamma}(t)\| = 1$$

b) die zurückgelegte Länge ist stets gleich der vergangenen Zeit:

$$\forall t \in [0, b] : s(t) = t \ .$$

Parametrisierung nach der Länge

Noch eine Voraussetzung. Es sei nun die Geschwindigkeit stets positiv:

$$\forall t \in [0, b] : \|\dot{\gamma}(t)\| > 0 \; .$$

Parametrisierung nach der Länge

Noch eine Voraussetzung. Es sei nun die Geschwindigkeit stets positiv:

$$\forall t \in [0, b] : \|\dot{\gamma}(t)\| > 0 \ .$$

Nun ist die Funktion

$$s : [0, b] \longrightarrow [0, L(\gamma)] \ , \ \ t \mapsto s(t)$$

bijektiv.

Parametrisierung nach der Länge

Noch eine Voraussetzung. Es sei nun die Geschwindigkeit stets positiv:

$$\forall t \in [0, b] : \|\dot{\gamma}(t)\| > 0 \; .$$

Nun ist die Funktion

$$s : [0, b] \longrightarrow [0, L(\gamma)] \; , \;\; t \mapsto s(t)$$

bijektiv.

Wir können also t durch s ausdrücken (Umkehrfunktion): $t = t(s)$.

Parametrisierung nach der Länge

Noch eine Voraussetzung. Es sei nun die Geschwindigkeit stets positiv:

$$\forall t \in [0, b] : \|\dot{\gamma}(t)\| > 0 \ .$$

Nun ist die Funktion

$$s : [0, b] \longrightarrow [0, L(\gamma)] \ , \ t \mapsto s(t)$$

bijektiv.

Wir können also t durch s ausdrücken (Umkehrfunktion): $t = t(s)$.

Wir erhalten eine neue Bewegung mit Parameter s:

$$\widehat{\gamma} : [0, L(\gamma)] \longrightarrow \mathbb{R}^d \ , \ s \mapsto \gamma(t(s))$$

Parametrisierung nach der Länge

Noch eine Voraussetzung. Es sei nun die Geschwindigkeit stets positiv:

$$\forall t \in [0, b] : \|\dot{\gamma}(t)\| > 0 \; .$$

Nun ist die Funktion

$$s : [0, b] \longrightarrow [0, L(\gamma)] \; , \; t \mapsto s(t)$$

bijektiv.

Wir können also t durch s ausdrücken (Umkehrfunktion): $t = t(s)$.

Wir erhalten eine neue Bewegung mit Parameter s:

$$\widehat{\gamma} : [0, L(\gamma)] \longrightarrow \mathbb{R}^d \; , \; s \mapsto \gamma(t(s))$$

Dies ist die **Parameterisierung nach der Weglänge**.

$\widehat{\gamma}$ erfüllt "Zeit = Länge". Genauer:

- Die Geschwindigkeit von $\widehat{\gamma}$ ist stets 1.
- Von $s = 0$ bis $s = s_e$ legt die Bewegung einen Weg der Länge s_e zurück.

Bewegung im Kreis

Die folgende Bewegung parametrisiert den Halbkreisbogen des Einheitskreises (von rechts nach links):

$$[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ x \mapsto (-x, \sqrt{1-x^2})$$

Bewegung im Kreis

Die folgende Bewegung parametrisiert den Halbkreisbogen des Einheitskreises (von rechts nach links):

$$[-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ x \mapsto (-x, \sqrt{1 - x^2})$$

Definition. Es sei π die Länge dieser Bewegung.

Bewegung im Kreis

Leider ist die Geschwindigkeit nicht konstant.

Bewegung im Kreis

Leider ist die Geschwindigkeit nicht konstant.

(Sie geht sogar gegen Unendlich für $x \longrightarrow -1$ bzw. $x \longrightarrow 1$; dort gibt es also gar keine Geschwindigkeit.)

Bewegung im Kreis

Leider ist die Geschwindigkeit nicht konstant.

(Sie geht sogar gegen Unendlich für $x \longrightarrow -1$ bzw. $x \longrightarrow 1$; dort gibt es also gar keine Geschwindigkeit.)

Es gibt nun eine Parametrisierung "nach der Länge / mit Geschwindigkeit 1".

Bewegung im Kreis

Leider ist die Geschwindigkeit nicht konstant.

(Sie geht sogar gegen Unendlich für $x \longrightarrow -1$ bzw. $x \longrightarrow 1$; dort gibt es also gar keine Geschwindigkeit.)

Es gibt nun eine Parametrisierung "nach der Länge / mit Geschwindigkeit 1". (Man kann im Wesentlichen das Obige anwenden – bis auf das "kleine Problem" an $x = \pm 1$.)

Bewegung im Kreis

Die Funktionen Sinus / Kosinus sind nun definiert als die x- und y-Koordinaten dieser Bewegung:

$$[0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ s \mapsto (\cos(s), \sin(s))$$

Hier ist nach Definition s die Länge des Bogens von $(1, 0)$ nach $(\cos(s), \sin(s))$.

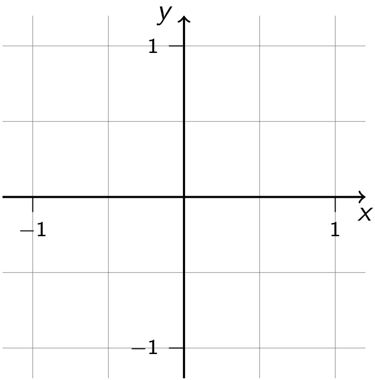
Bewegung im Kreis

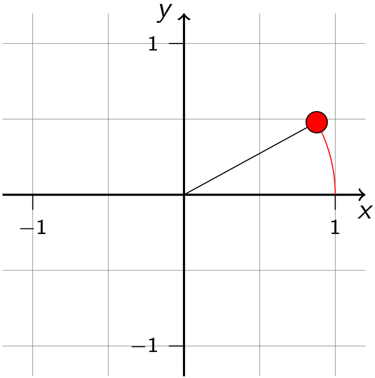
Die Funktionen Sinus / Kosinus sind nun definiert als die x- und y-Koordinaten dieser Bewegung:

$$[0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ s \mapsto (\cos(s), \sin(s))$$

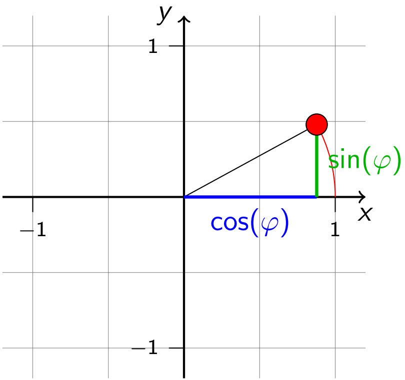
Hier ist nach Definition s die Länge des Bogens von $(1, 0)$ nach $(\cos(s), \sin(s))$.

Man bezeichnet die Bogenlänge meist mit griechischen Buchstaben, z.B. mit φ. Dann ist also φ die Länge des Bogens von $(1, 0)$ nach $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$.


y
1
x
−1
1
−1



y
1
x
−1
1
−1


y
x
1
-1
-1
1
$\sin(\varphi)$
$\cos(\varphi)$

Bewegung im Kreis

Nach Definition ist

$$(\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2 = 1 \ .$$

Man schreibt auch:

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \ .$$

Bewegung im Kreis

Nach Definition ist

$$(\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2 = 1 \; .$$

Man schreibt auch:

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \; .$$

Nach Definition ist die skalare Geschwindigkeit gleich 1, d.h.

$$(\frac{\mathrm{d}\sin(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi})^2 + (\frac{\mathrm{d}\cos(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi})^2 = 1 \; .$$

Bewegung im Kreis

Nach Definition ist

$$(\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2 = 1 \; .$$

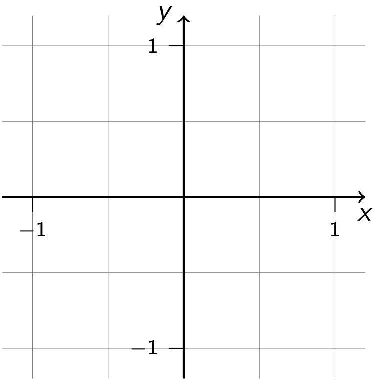
Man schreibt auch:

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \; .$$

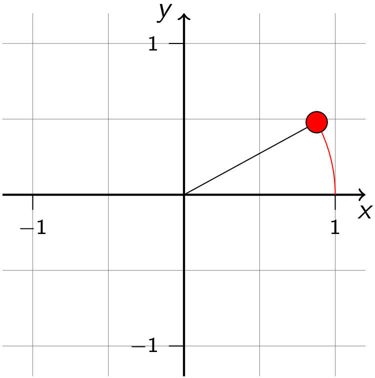
Nach Definition ist die skalare Geschwindigkeit gleich 1, d.h.

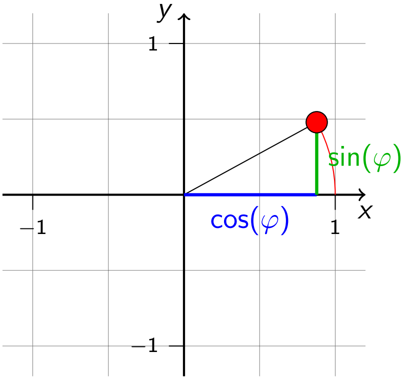
$$\Big(\frac{\mathrm{d}\sin(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\Big)^2 + \Big(\frac{\mathrm{d}\cos(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\Big)^2 = 1 \; .$$

Aber was ist $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$?

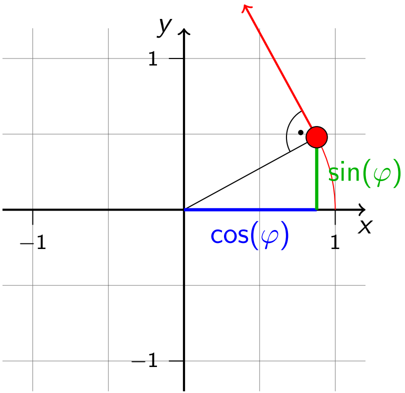


y
1
x
−1
1
−1

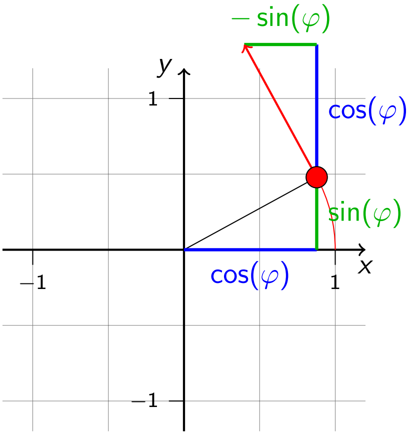

y
1
x
−1
1
−1



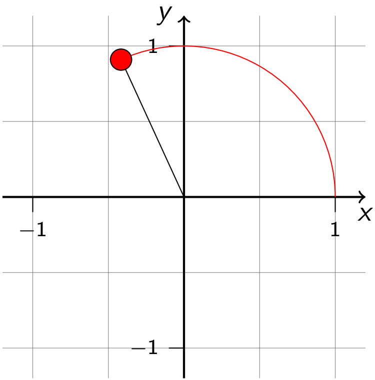
y
1
$\sin(\varphi)$
x
$\cos(\varphi)$
-1
1
-1



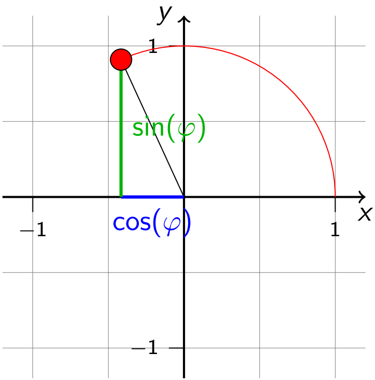
y
1
x
−1
1
−1
sin(φ)
cos(φ)



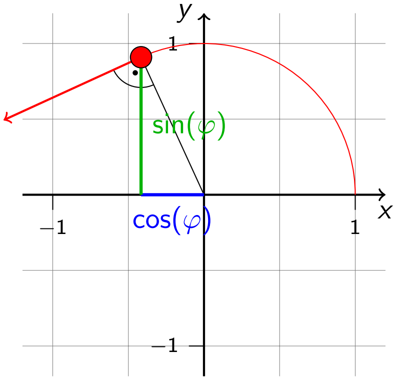
$-\sin(\varphi)$
y
1
$\cos(\varphi)$
$\sin(\varphi)$
x
-1
$\cos(\varphi)$
1
-1



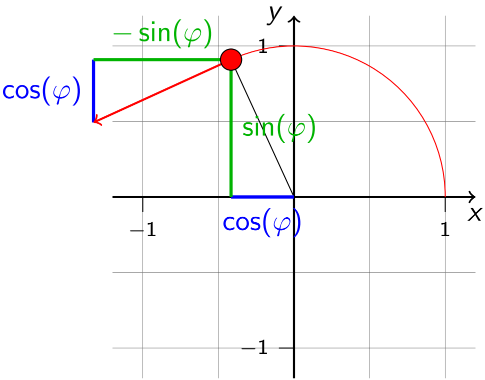
y
1
x
−1
1
−1



y
1
$\sin(\varphi)$
x
$\cos(\varphi)$
-1
1
-1



y
1
sin(φ)
x
−1
cos(φ)
1
−1



y
x
1
−1
1
−1
− sin(φ)
cos(φ)
sin(φ)
cos(φ)

Bewegung im Kreis

Die geometrische Anschauung legt nahe:

Die Ableitung von

$$[0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ \varphi \mapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

ist

$$\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Dies hat die richtige Länge (nämlich 1) und die richtige Richtung.

Die Winkelfunktionen

Wir setzen nun noch für $\varphi \in [0, \pi]$:

$$\sin(\varphi + \pi) := -\sin(\varphi) \quad \cos(\varphi + \pi) := -\cos(\varphi)$$

Damit erhalten wir eine Parametrisierung des Kreises nach der Länge, also 2π.

Die Winkelfunktionen

Wir setzen nun noch für $\varphi \in [0, \pi]$:

$$\sin(\varphi + \pi) := -\sin(\varphi) \quad \cos(\varphi + \pi) := -\cos(\varphi)$$

Damit erhalten wir eine Parametrisierung des Kreises nach der Länge, also 2π.

Dies setzen wir **periodisch fort**, so dass

$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi)\ ,\ \cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi)$$

für alle φ.

Die Winkelfunktionen

Außerdem

$$\tan(\varphi) := \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

für alle $\varphi \neq \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots$.

Die Winkelfunktionen

Außerdem

$$\tan(\varphi) := \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

für alle $\varphi \neq \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots$.

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}\tan(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} = \frac{1}{\cos^2(\varphi)} \; .$$

Die Winkelfunktionen

Wir schreiben das Argument nun “ganz normal” mit x.

Dann sind sin und cos Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad , \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

und Periode 2π.

Die Winkelfunktionen

Wir schreiben das Argument nun "ganz normal" mit x.

Dann sind sin und cos Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad , \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

und Periode 2π.

Und tan ist eine Funktion von $\mathbb{R} \backslash \{\frac{2n+1}{2} \cdot \pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$$

und Periode 2π.