

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

gehalten von Claus Diem

Übungen

- ▶ Die Seminare / Übungsgruppen / Tutorien finden wöchentlich statt.
- ▶ Alle zwei Wochen am Montag wird ein Übungsblatt ausgegeben.
- ▶ Dies wird dann andertalb Wochen später am Freitag besprochen.
- ▶ Ausnahme: Heute gibt es ein Blatt, das in einer Woche besprochen wird.
- ▶ Sie können / sollten Ihre Lösungen abgeben.
- ▶ Die Gruppe am Dienstag ab 17 Uhr findet nicht statt.

Inhalt

Bisher:

- ▶ Kapitel I – Mathematik für Kaufleute
- ▶ Kapitel II – Grundlagen
- ▶ Kapitel III – Differentialrechnung in einer Variablen

Inhalt

Nun (ab Montag):

- ▶ Kapitel IV – Differentialrechnung in mehreren Variablen
- ▶ Kapitel V – Integralrechnung
- ▶ Kapitel VI – Lineare Algebra

Kapitel III. Differentialrechnung in einer Variablen

Bisher:

§1 Stetigkeit und Grenzwert

§2 Die Ableitung

§3 e^x und die stetige Wachstumsrate

Mittelwertsatz

Satz. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) .$$

Bemerkung. Ich hatte zuerst “Zwischenwertsatz” geschrieben. Dies war nicht richtig. Der Zwischenwertsatz ist diese Aussage:

Eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

e als Grenzwert

Satz. Die Funktion

$$(0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \mapsto \left(1 + \frac{1}{a}\right)^a$$

ist streng monoton wachsend und hat den Grenzwert e für $a \longrightarrow \infty$.

$$\lim_{a \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^a = e$$

Beweis.

Dies ist äquivalent zu:

Die Funktion $a \mapsto \ln\left(\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a\right)$ ist streng monoton wachsend mit Grenzwert 1 für $a \longrightarrow \infty$.

e als Grenzwert

$$\begin{aligned}\ln\left(\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a\right) &= a \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) \\ &= a \cdot \ln\left(\frac{1+a}{a}\right) = a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a))\end{aligned}$$

Beh. Die Funktion ist streng monoton wachsend.

dazu: Die Ableitung (nach a) ist:

$$\begin{aligned}\ln(1+a) - \ln(a) + a\left(\frac{1}{1+a} - \frac{1}{a}\right) &= \ln(1+a) - \ln(a) + \frac{a}{1+a} - 1 \\ &= \ln(a+1) - \ln(a) + \frac{a-1-a}{a+1} = \ln(a+1) - \ln(a) - \frac{1}{a+1} \\ &= \frac{1}{c} - \frac{1}{a+1} \text{ mit } c \in (a, a+1) \\ &> \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+1} > 0.\end{aligned}$$

e als Grenzwert

Beh. Der Grenzwert für $a \longrightarrow \infty$ ist 1.

dazu:

$$\begin{aligned}\ln\left(\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a\right) &= a \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) \\&= a \cdot \ln\left(\frac{1+a}{a}\right) = a \cdot (\ln(1+a) - \ln(a)) \\&= a \cdot \frac{1}{c} \quad \text{mit } c \in (a, a+1). \\&\in \left(\frac{a}{a+1}, 1\right) \\&= \left(1 - \frac{1}{a+1}, 1\right)\end{aligned}$$

Somit: Für $a \longrightarrow \infty$ konvergiert $\ln\left(\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a\right)$ gegen 1.

Also: Für $a \longrightarrow \infty$ konvergiert $\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a$ gegen e.



e als Grenzwert

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^a = e$$

Sei nun $x > 0$. Dann konvergiert die Folge $\left(\frac{n}{x}\right)_{n \in \mathbb{N}^+}$ gegen ∞ .
Somit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}} = e$$

Mit anderen Worten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Lineare Approximation an 0

Für “große x ” wächst e^x sehr schnell (schneller als jedes Polynom).

Aber was ist für x “nahe 0”?

Wir haben:

$$\left. \frac{de^x}{dx} \right|_{x=0} = 1$$

(Das ist unsere Definition von e .)

D.h.:

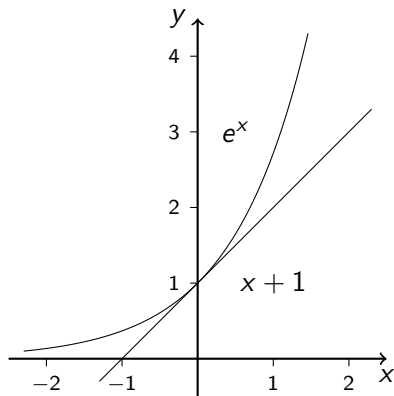
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dies legt nahe: Für x “nahe 0” haben wir die Approximationen

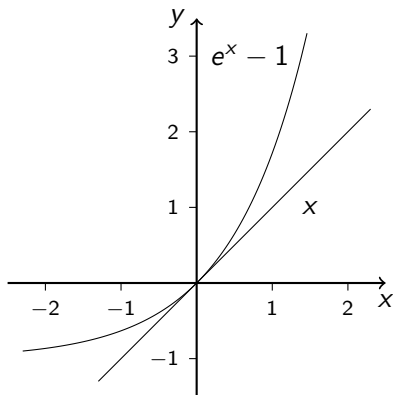
$$\frac{e^x - 1}{x} \approx 1 \quad , \quad e^x - 1 \approx x$$

Idee hierzu: $e^x - 1$ läuft durch $(0,0)$ und hat die Steigung 1 an diesem Punkt.

Lineare Approximation an 0



Linear Approximation at 0



Lineare Approximation an 0

Wie klein sollte $|x|$ sein?

x	$e^x - 1$
1	1,7183
0,1	0,1052
0,05	0,0513
0,02	0,0202
0,01	0,0101
0,005	0,0050

Konsistenzcheck

Für x “klein”:

$$e^x - 1 \approx x \quad , \quad e^x \approx 1 + x$$

Das legt nahe: (Das ist aber weit von einem rigorosen Argument entfernt!)

$$(1 + x)^{1/x} \approx e$$

Für $x = \frac{1}{a}$ mit a “groß”:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a \approx e$$

(Zurück zu) Wachstum

Wir betrachten eine Größe a in Abhängigkeit von Zeit:

$$a : t \mapsto a(t)$$

Wir setzen voraus:

$$\frac{da(t)}{dt} = c$$

für eine Konstante b .

Das können wir auch so ausdrücken:

$$da = b \cdot dt$$

“Eine infinitesimale Änderung von t um dt ändert a um $c dt$.”

Dann ist

$$a(t) = bt + c$$

mit einer Konstante d .

Wir haben lineares Wachstum: In einem Zeitraum von Δt ist dies $b\Delta t$.

Konstantes stetiges Wachstum

Es gelte

$$\frac{da(t)}{dt} = r a(t)$$

mit einer Konstante $r > 0$.

Das können wir auch so ausdrücken:

$$da = a \cdot r dt$$

“Eine infinitesimale Änderung von t um dt ändert a um $a \cdot r dt$.”

“Für eine konstante infinitesimale Änderung von t ist die Änderung von a proportional zu $a(t)$.”

Oder auch:

$$\frac{da}{a} = r dt$$

“Für eine konstante infinitesimale Änderung von t ist das Verhältnis des Zuwachses von a zu a selbst konstant.”

Konstantes stetiges Wachstum

$$\frac{da(t)}{dt} = r a(t)$$

Eine Lösung:

$$a(t) = e^{rt}$$

Allgemein (erstmal ohne Beweis):

$$a(t) = e^{rt} a(0)$$

Konstantes stetiges Wachstum

Herleitung der Lösung. (Nehmen wir mal an, wir kennen sie nicht.)

Sei

$$\frac{da(t)}{dt} = ra(t) \quad , \quad a(0) > 0$$

Somit:

$$\frac{d\ln(a(t))}{dt} = \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} = r$$

$$\ln(a(t)) = rt + \ln(a(0))$$

$$a(t) = e^{rt + \ln(a(0))} = e^{rt} \cdot a(0)$$

Konstantes stetiges Wachstum

Herleitung für Physiker / Wiwis:

Voraussetzung:

$$\frac{da}{a} = r \, dt ,$$

Nun ist

$$\frac{d \ln(a)}{da} = \frac{1}{a}, \text{ also } d \ln(a) = \frac{da}{a}$$

Somit:

$$d \ln(a) = r \, dt$$

Hieraus folgt:

$$\ln(a) = rt + c$$

mit einer Konstanten c .

$$\implies a = e^{rt+c} = e^{rt} \cdot e^c = e^{rt} \cdot a_0$$

mit $a_0 := e^c$. ($a_0 = a(0)$.)

Übrigens ...

Eine Ableitung nach der Zeit bezeichnet man in der Regel mit “Punkt” und nicht mit “Strich”:

$$\frac{da}{dt} = \dot{a}$$

Diese Notation geht auf Newton zurück, die Notation mit “Differentialquotienten”

$$\frac{da}{dt}$$

auf Leibniz.

Konstantes stetiges Wachstum

Es gelte

$$a(t) = e^{rt} \cdot a_0 \quad , \quad a_0 > 0$$

Also: a wächst exponentiell in der Zeit.

Wir wählen einen Zeitraum Δt . Dann ist

$$\frac{a(t + \Delta t)}{a(t)} = \frac{e^{r(t+\Delta t)} \cdot a_0}{e^{rt} \cdot a_0} = e^{r\Delta t} .$$

Konstantes stetiges Wachstum

$$\frac{a(t + \Delta t)}{a(t)} = e^{r\Delta t} .$$

Damit ist der **Wachstumsfaktor** f für die Periodenlänge Δt gleich

$$e^{r\Delta t}$$

und die **Wachstumsrate** g für die Periodenlänge Δt ist

$$e^{r\Delta t} - 1 .$$

Wichtig. Für gegebenes r sind f und g Zahlen, die von Δt abhängen.

Konstantes stetiges Wachstum

$$a(t) = e^{rt} \cdot a_0$$

$$1 + g = f = e^{r\Delta t}, \quad g = e^{r\Delta t} - 1.$$

r ist eine Größe der Dimension $\frac{1}{\text{Zeit}}$. Sie heißt die **stetige Wachstumsrate**.

Um g nicht mit r zu verwechseln, nennt man g auch die **diskrete Wachstumsrate** für die Periodenlänge Δt .

Wenn Δt ein Jahr ist, nennt man g **jährliche (diskrete) Wachstumsrate**, entsprechend wenn Δt ein Monat, ein Tag, eine Stunde, eine Minute, eine Sekunde ist ...

Konstantes stetiges Wachstum

$$a(t) = e^{rt} \cdot a_0$$

$$1 + g = f = e^{r\Delta t}, \quad g = e^{r\Delta t} - 1.$$

$r\Delta t$	g
100%	171,83%
10%	10,52%
5%	5,13%
2%	2,02%
1%	1,01%
0,5%	0,050%

Konstantes stetiges Wachstum

$$a(t) = e^{rt} \cdot a_0$$

$$1 + g = f = e^{r\Delta t}$$

Wie lautet r in Abhängigkeit von f oder g ?

$$r\Delta t = \ln(f) = \ln(1 + g)$$

$$r = \frac{\ln(f)}{\Delta t} = \frac{\ln(1 + g)}{\Delta t}$$

Beispiel

Eine Zellkultur hat eine **stetige Wachstumsrate** von $1 = 100\%$ pro Stunde.

Dann hat sie nach einer Stunde $e^{\frac{1}{h}h} = e$ -mal so viele Zellen wie zu Beginn ($h = \text{Stunde}$).

Sie hat einen **(diskreten) stündlichen Wachstumsfaktor** von $e \approx 2,72$,

eine **(diskreten) stündliche Wachstumsrate** von $e - 1 \approx 2,72 - 1 = 1,72 = 172\%$.

Das ist also (viel) größer als 100%.

Beispiele

Wie kann man das verstehen?

Da wir stetiges Wachstum betrachten, ist es naheliegend die Zeiträume des Wachstums “ganz klein” zu wählen. Bei “ganz kleinen” Zeiträumen sollte es keinen Unterschied zwischen diskretem und stetigem Wachstum geben.

Beispiele

Die stetige Wachstumsrate ist:

- ▶ $1 = 100\%$ pro Stunde
- ▶ $1/60$ -stel pro Minute
- ▶ $1/3600$ -stel pro Sekunde

Formal:

$$r = \frac{1}{\text{Stunde}} = \frac{1/60}{\text{Minute}} = \frac{1/3600}{\text{Sekunde}}$$

Achtung. Eine analoge “Rechnung” für die diskrete Wachstumsrate wäre falsch!

Eine stündliche diskrete Wachstumsrate von $1 = 100\%$ entspricht nicht einer minütlichen diskreten Wachstumsrate von $1/60$ -stel!

Beispiele

$$r = \frac{1}{\text{Stunde}} = \frac{1/60}{\text{Minute}} = \frac{1/3600}{\text{Sekunde}}$$

Wir rechnen mit “Wachstumssprüngen”:

- ▶ 1 Mal um 1 = 100% wachsen:

$$f = 2 = 200\%, g = 1 = 100\%$$

- ▶ 60 Mal um 1/60-stel wachsen:

$$f = \left(1 + \frac{1}{60}\right)^{60} \approx 2,69, g \approx 169\%$$

- ▶ 3600 Mal um 1/3600-stel wachsen:

$$f = \left(1 + \frac{1}{3600}\right)^{3600} \approx 2,72 \approx e, g \approx 172\%$$

Idee. Stetiges Wachstum kann durch fortlaufendes diskretes Wachstum approximiert werden.

Mathematischer Hintergrund. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Von diskret zu stetig

Allgemein:

Es ist

$$e^{r\Delta t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r\Delta t}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + r\frac{\Delta t}{n}\right)^n.$$

D.h.: Wenn eine stetige Wachstumsrate von r und ein Zeitintervall Δt gegeben ist, ist der entsprechenden Wachstumsfaktor approximativ so gegeben:

Man unterteilt Δt in “ganz viele” “kleine” Zeitintervalle $\frac{\Delta t}{n}$ und wendet in jedem der Intervalle ein diskretes Wachstum von $r\frac{\Delta t}{n}$ an.

Je mehr Intervalle man nimmt, desto besser ist die Approximation.

Zinsen

Eine Bank bietet einen Zinssatz von g für eine feste Anlage von einem Jahr an. Dann heißt g der **effektive Jahreszinssatz**.

Wenn man einen Betrag von a_0 anlegt, hat man nach einem Jahr

$$(1 + g) \cdot a_0 .$$

Nach m Jahren:

$$(1 + g)^m \cdot a_0 .$$

Wenn die Bank tägliches Abheben erlaubt, kann m ein Vielfaches von 360 sein.

(Für Details siehe hierzu Wikipedia: Zinsberechnungsmethode).

Zinsen

Der **effektive Jahreszins** ist immer der Zins, den man bei einer konstanten Anlage für ein Jahr erhält, egal ob man das Recht hat, das Geld abzuziehen oder nicht.

Ein “auf den ersten Blick erscheinender” jährliche Zinssatz heißt im Bankwesen oftmals **nominaler Jahreszinssatz**. (Das ist kein besonders klar definierter Begriff.)

(Entsprechend für andere Zeiträume)

Vorsicht. Das Wort hat “nominaler Jahreszinssatz” eine andere Bedeutung in der VWL! Dort bedeutet es: Jahreszinssatz ohne Berücksichtigung von Inflation.

Zinsen

Unterschiede können sich ergeben aus:

- ▶ Gebühren (beachten wir nicht)
- ▶ Unterjährigen Gutschriften

Zinsen

Eine Bank bietet nun an: Der (nominale) Jahreszinssatz beträgt $z = z \cdot 100\%$ bei **monatlicher Gutschrift**.

Dann beträgt der effektive monatliche Zinssatz $\frac{z}{12}$. Dies nennt man den **relativen Periodenzinssatz**.

Der effektive Jahreszinssatz ist dann

$$g = \left(1 + \frac{z}{12}\right)^{12} - 1$$

Zinsen

Entsprechend bei täglicher Auszahlung:

$$g = \left(1 + \frac{z}{360}\right)^{360} - 1$$

Dies ist “fast genau”

$$e^z - 1$$

(Wir vernachlässigen den wirklich sehr kleinen Fehler.)

Zinsen

Das angelegte Geld nach m Jahren ist:

$$e^{zm} \cdot a_0$$

Wie lautet $a(t)$ (t die Zeit)?

Wir schreiben $t = m \text{ Jahr(e)}$ und erhalten:

$$a(t) = e^{\frac{z}{\text{Jahr}} t} a_0$$

Somit wächst das Geld mit einer stetigen Wachstumsrate von

$$r = \frac{z}{\text{Jahr}} .$$

r heißt der **stetige Zinssatz**.

Zinsen

Beispiel 1

Eine Bank sagt:

Der nominale Jahreszinssatz beträgt 10% pro Jahr bei täglicher Gutschrift.

Dann:

- ▶ Nominaler Jahreszinssatz: $z = 10\%$
- ▶ Stetiger Zinssatz (stetige Wachstumsrate): $r = \frac{10\%}{\text{Jahr}}$
- ▶ Jährlicher Wachstumsfaktor $f \approx 1,105$
- ▶ Effektiver Jahreszinssatz (=jährliche (diskrete) Wachstumsrate) $g \approx 10,5\%$.

Beispiel 2

Eine Person leiht einer anderen Person Geld für ein Jahr mit 10% Zinsen, fällig bei der Rückzahlung am Ende des Jahres.

Dann:

- ▶ Effektiver Jahreszinssatz (=jährliche (diskrete) Wachstumsrate) $g = 10\%$ (hier = nominaler Zinssatz)
- ▶ Jährlicher Wachstumsfaktor $f = 1,1$
- ▶ Stetiger Zinssatz (=stetige Wachstumsrate) $r \approx \frac{9,5\%}{\text{Jahr}}$