Einige Gedanken zur Fibonacci Folge

Im Folgenden gehe ich auf einige Aspekte von Aufgabe 4 auf Übungsblatt 5, d.h. auf Aufgabe 14 auf Seiten 12 und 13 des Buches Hahn-Dzewas: Mathematik 11, ein. Die Aufgabe hat die sogenannte Fibonacci Folge zum Inhalt. Dies ist eine sehr bekannte und vielstudierte Folge.

Das Folgende ist keine Musterlösung zu den einzelnen Teilen der Aufgabe, ich hoffe aber, dass es hilft, die gesamte Aufgabe besser zu verstehen und auch zu lösen.

Es ist klassisch, die Folge nicht mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ zu bezeichnen sondern mit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$. So mache ich das jetzt auch.

Die Folge ist nun durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$F_1 := 1 \quad F_2 := 1 \quad F_{n+1} := F_n + F_{n-1} \text{ für } n \geq 2$$

Wir lassen ja Folgen immer beim Index 1 beginnen. In diesem Fall ist es aber praktisch, bei 0 zu beginnen. Die Definition lautet dann:

$$F_0 := 0 \quad F_1 := 1 \quad F_{n+1} := F_n + F_{n-1} \text{ für } n \geq 1$$

Die Gleichung

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \tag{1}$$

heißt die *Rekursionsgleichung* der Folge. Die Folge ist also dadurch definiert, dass sie diese Gleichung sowie die *Anfangsbedingungen*

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 1 \tag{2}$$

erfüllt.

Ein Kommentar hierzu: Ich habe oben F_n etc. geschrieben, jetzt schreibe ich a_n etc. Dies mache ich, weil ich die Unbestimmten in den Gleichungen von der Fibonacci-Folge unterscheiden will. Die Fibonacci-Folge ist die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichungen (1) und (2). Wir können aber auch die Rekursionsgleichung getrennt betachten; dann gibt es viele Lösungen. Genauer gesagt gibt es für alle Anfangsbedingungen $a_0 = c, a_1 = d$ mit festen Zahlen c, d genau eine Lösung der Rekursionsgleichung (1).

Die explizite Darstellung

Im Buch ist nun eine explizite Formel für F_n angegeben. Ich zeige nun, wie man diese Formel finden kann und wie man sich dabei auch noch davon überzeugen kann, dass die Formel richtig ist.

Wir fragen uns als erstes, ob es eine positive reelle Zahl α gibt mit welcher die Folge $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ die Rekursionsgleichung (1) erfüllt. Dies bedeutet gerade, dass für alle n gelten soll:

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1}$$

Man kann so eine Gleichung durch α^{n-1} teilen und erhält dann:

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \tag{3}$$

Man beachte, dass dies eine einzige Bedingung ist. Im Gegensatz dazu ist durch die "Rekursionsgleichung" für jedes n eine Bedingung gegeben.

Also: Die Folge $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ erfüllt genau dann die Rekursionsgleichung, wenn (3) gilt. Dies bedeutet also, dass

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

gelten soll.

Diese quadratische Gleichung kann man nun lösen. Diese Gleichung ist äquivalent zu:

$$\alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(Nachrechnen!)

Wir setzen:

$$\alpha_1 := \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \alpha_1 := \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Nun erfüllen also die Folgen $(\alpha_1^n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ und $(\alpha_2^n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ die Rekursionsgleichung.

Man sieht nun leicht, dass für alle festen Zahlen g, h auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ mit

$$a_n := g \cdot \alpha_1^n + h \cdot \alpha_2^n$$

die Rekursionsgleichung erfüllt.

Gibt es nun auch Zahlen g und h, mit welchen diese Folge auch die Anfangsbedingungen $a_0 = 0, a_1 = 1$ der Fibonacci-Folge erfüllt? Wenn ja, dann haben wir eine Folge, die identisch mit der Fibonacci-Folge ist, gefunden.

Nun lauten die Anfangsbedingungen $a_n = 0, a_1 = 1$ angewandt auf die obige Folge:

$$g + h = 0 \quad , \quad g \cdot \alpha_1 + h \cdot \alpha_2 = 1$$

Die erste Gleichung besagt also: $h = -g$, und wenn man das in die zweite Gleichung einsetzt und beachtet, was α_1, α_2 sind, erhält man $g = \frac{1}{\sqrt{5}}$, also $h = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. (Nachrechnen!)

Damit lautet die Folge also

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\alpha_1^n - \alpha_2^n\right)$$

mit α_1, α_2 wie oben definiert.

Diese Folge ist nun identisch mit der Fibonacci-Folge, d.h. es ist

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\alpha_1^n - \alpha_2^n\right) . \tag{4}$$

Wir haben also die gesuchte explizite Darstellung (oder Formel) für F_n gefunden.

Die Gleichungen

In der Aufgabe sind die Gleichungen

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$$

und

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1} \tag{5}$$

zu zeigen.

Die zweite Formel folgt wie folgt aus der ersten:

Es ist

$$\begin{aligned} & F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} \\ = \ & F_n^2 - F_{n-1} \cdot (F_n + F_{n-1}) \\ = \ & F_n^2 - F_{n-1}F_n - F_{n-1}^2 \\ = \ & (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung ist genau die Formel $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$ für $n-1$ eingesetzt für n. (Das geht, da die Gleichung für beliebige natürliche Zahlen n gilt.)

Für die erste Gleichung wird im Buch vorgeschlagen, die explizite Formel (4) zu benutzen. Das geht auch ganz gut, wenn man das Folgende beachtet:

Die Zahlen α_1 und α_2 sind Nullstellen des Polynoms

$$x^2 - x - 1 .$$

Damit gilt insbesondere $x^2 - x - 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$, d.h.

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad , \quad \alpha_1\alpha_2 = -1 .$$

(Das sieht man natürlich auch mittels Nachrechnen.)

Alternativ kann man die Aussage auch per Induktion zeigen:

$\underline{n = 0}$
Es wird behauptet, dass $1 - 0 - 0 = (-1)^0$ ist. Das stimmt.

$\underline{n - 1 \curvearrowright n}$
Es gelte

$$F_n^2 - F_n F_{n-1} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$$

(IV).
Zu zeigen ist nun:

$$F_{n+1}{}^2 - F_{n+1} F_n - F_n^2 = (-1)^n$$

Dazu: Es ist

$$\begin{aligned}
& F_{n+1}{}^2 - F_{n+1} F_n - F_n^2 \\
= \quad & (F_n + F_{n-1})^2 - (F_n + F_{n-1}) \cdot F_n - F_n^2 \\
= \quad & F_n^2 + 2F_n F_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_n^2 - F_{n-1} F_n - F_n^2 \\
= \quad & F_{n-1}^2 + F_n F_{n-1} - F_n^2 \\
= \quad & -(F_n^2 - F_n F_{n-1} - F_{n-1}^2) \\
\stackrel{\text{(IV)}}{=} \quad & -(-1)^{n-1} = (-1)^n \, .
\end{aligned}$$

Der goldene Schnitt

Die Aufgabe ist vielleicht etwas unklar gestellt. Die Aussage ist:

Wenn man n groß wählt und $a := F_n, b := F_{n+1}$ setzt, ist offensichtlich $a + b = F_{n+2}$. Es gilt nun approximativ

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

Um dies zu sehen, kann man die Gleichung (5) benutzen. Wenn man n duch $n + 1$ ersetzt, erhält man:

$$F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$$

Wenn man dies durch $F_{n+1} F_{n+2}$ teilt, erhält man:

$$\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} - \frac{F_n}{F_{n+1}} = (-1)^n \cdot \frac{1}{F_{n+1} F_{n+2}}$$

Also:
$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}$$
Wir sehen, dass wir „bis auf den Fehler“ $(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}$ die Gleichung

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$

haben. Nun konvergiert der „Fehler“ $(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}$ für wachsendes n monoton fallend gegen 0. Für wachsendes n wird der „Fehler“ also immer kleiner.