Privatdozent Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/wiwi

MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER II
EIN BEISPIEL ZUR INTEGRATION RATIONALER FUNKTIONEN

Zur Erläuterung der Integration rationaler Funktionen gebe ich im Folgenden eine ausführliche Lösung mit Kommentaren eines recht umfangreichen Beispiels an.

Die Aufgabe

Bestimme das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^3+7x^2+13x-4}{x^3+4x^2+x-26}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung mit Kommentaren

Da der Grad des Zählers mindestens so groß wie der Grad des Nenners ist, beginnen wir mit einer Polynomdivision. Dies ist hier ganz einfach:

$$x^3+7x^2+13x-4 = 1\cdot(x^3+4x^2+x-26)+3x^2+12x+22$$

Also:

$$\int \frac{x^3+7x^2+13x-4}{x^3+4x^2+x-26}\,\mathrm{d}x = \int (1+\frac{3x^2+12x+22}{x^3+4x^2+x-26})\,\mathrm{d}x =$$

$$x+\int \frac{3x^2+12x+22}{x^3+4x^2+x-26}\,\mathrm{d}x$$

Nun muss man den Nenner faktorisieren. Dies geht sicher, denn der Nenner hat Grad 3 und hat also eine Nullstelle. Wie lautet diese?
Mit Ausprobieren erhält man: 2 eine Nullstelle des Nenners $8+16+2-26=0$. Polynomdivision liefert:

$$x^3+4x^2+x-26=(x-2)\cdot(x^2+6x+13)$$

Nun hat $x^2+6x+13$ keine Nullstelle, da die sogenannte Diskriminante $6^2-4\cdot 13 = 36-52 = 16$ negativ ist. (Unter der pq-Wurzel steht ein Viertel davon.)
Es folgt die Paritialbruchzerlegung.
Man weiß: Es gibt eindeutig bestimmte Zahlen A, B, C mit:

$$\frac{3x^2+12x+22}{x^3+8x^2+25x+26} = \frac{3x^2+12x+22}{(x-2)(x^2+6x+13)} = \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+6x+13}$$

Diese bestimmen wir.
Multiplikation mit $x-2$ liefert:

$$\frac{3x^2+12x+22}{x^2+6x+13} = A+(Bx+C)\cdot\frac{x-2}{x^2+6x+13}$$

Dies gilt a priori für $x \neq 2$ (denn für $x = 2$ ist ja für die ursprüngliche Funktion nicht definiert). Die Gleichung gilt dann aber auch für $x = 2$. Dies sieht man, wenn man den Grenzwert an $x = 2$ betrachtet.
Wir setzen $x = 2$ und erhalten:

$$2 = \frac{58}{29} = \frac{12 + 24 + 22}{4 + 12 + 13} = A$$

Multiplikation mit $x^2 + 6x + 13$ liefert:

$$\frac{3x^2 + 12x + 22}{x - 2} = 2 \cdot \frac{x^2 + 6x + 13}{x - 2} + Bx + C$$

Wir setzen $x = 0$:

$$\frac{22}{-2} = 2 \cdot \frac{13}{-2} + C \quad , \quad C = -11 + 13 = 2$$

und $x = 1$:

$$\frac{3 + 12 + 22}{-1} = 2 \cdot \frac{20}{-1} + B + 2 \quad , \quad B = -37 + 40 - 2 = 1$$

Insgesamt:

$$\frac{3x^2 + 12x + 22}{x^3 + 8x^2 + 25x + 26} = \frac{2}{x - 2} + \frac{x + 2}{x^2 + 6x + 13}$$

Zurück zum Integral:

$$\int \frac{x^3 + 7x^2 + 13x - 4}{x^3 + 4x^2 + x - 26}\,\mathrm{d}x \;= x + \int (\frac{2}{x - 2} + \frac{x + 2}{x^2 + 6x + 13})\,\mathrm{d}x =$$

$$x + 2\ln(|x - 2|) + \int \frac{x + 2}{x^2 + 6x + 13}\,\mathrm{d}x\ .$$

Was ist

$$\int \frac{x + 2}{x^2 + 6x + 13}\,\mathrm{d}x\ ?$$

Das Ziel ist nun, den Zähler so in eine Summe von zwei Summanden zu zerlegen, dass der erste Summand ein Vielfaches der Ableitung des Nenners ist und der zweite Summand eine Konstante. Die Ableitung von $x^2 + 6x + 13$ ist $2x + 3$, also versuchen wir, den Zähler entsprechend umzuformen:

$$\frac{x + 2}{x^2 + 6x + 13} = \frac{1}{2}\frac{2x + 4}{x^2 + 6x + 13} =$$

$$\frac{1}{2}(\frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 13} - \frac{2}{x^2 + 6x + 13}) = \frac{1}{2}\frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 13} - \frac{1}{x^2 + 6x + 13}$$

Wir haben:

$$\int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 13}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2 + 6x + 13)\ ;$$

genau deshalb haben wir diese Umformungen auch gemacht. [1] [2]

---

[1] Wenn man will, kann man die Substitution $z = x^2 + 6x + 13$ machen mit $\mathrm{d}z = (2x + 6)\,\mathrm{d}x$ und somit $\int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 13}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \ln(|z|) = \ln(x^2 + 6x + 13)$.

[2] Es sind keine Betragsstriche um $x^2 + 6x + 13$ notwendig, weil dies sowieso immer positiv ist.

Um $\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x$ auszurechnen, benutzen wir, dass $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x)$ ist. Hierzu machen wir einige Umformungen:

$$\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x^2+6x+9)+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+3)^2+4}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x+3}{2})^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\arctan(\frac{x+3}{2})$$

[3] Insgesamt:

$$\int \frac{x^3+7x^2+13x-4}{x^3+4x^2+x-26}\,\mathrm{d}x \ = x + 2\ln(|x-2|) - \int \frac{x+2}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x =$$

$$x + 2\ln(|x-2|) + \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+13) - \frac{1}{2}\cdot\arctan(\frac{x+3}{2})$$

---

[3] Für den letzten Schritt kann man die Substitution $z = \frac{x+3}{2}$ machen mit $\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$, also $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}z$. Damit ist dann $\int \frac{1}{(\frac{x+3}{2})^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\arctan(z) = 2\arctan(\frac{x+3}{2})$.