Jun.Prof. Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/la

# LINEARE ALGEBRA FÜR INFORMATIKER
# ÜBUNGSBLATT NR. 8

## Aufgaben für die Übungsgruppen

**Aufgabe Ü1** Sei $R$ ein kommutativer Ring, und seien $a_0, \ldots, a_d, b_0, \ldots, b_e, r \in R$. Wir setzen $a_{d+1} = \cdots = a_{d+e} = 0$ und $b_{e+1} = \cdots = b_{d+e} = 0$.
Diskutieren Sie die folgende Formel:

$$(\sum_{i=0}^{d} a_i r^i) \cdot (\sum_{i=0}^{e} b_i r^i) = \sum_{n=0}^{d+e} \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \, r^n$$

Sei nun $r \in R$. Zeigen Sie: Die Abbildung $R[X] \longrightarrow R$, $p(X) \mapsto p(r)$ ist ein Ringhomomorphismus, und es ist der einzige Ringhomomorphismus $\psi : R[X] \longrightarrow R$ mit $X \mapsto r$ und $\psi|_R = \mathrm{id}_R$.

**Notation** Sei $R$ ein Ring und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann schreiben wir $n$ für $n \cdot 1_R := \overbrace{1_R + \cdots + 1_R}^{n \text{ mal}}$. Damit schreiben wir also $i$ für $[i]_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Insbesondere ist $n = 0 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$!

**Aufgabe Ü2**

a) Berechnen Sie mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus jeweils den ggT der folgenden Polynome $a(X), b(X)$ in $\mathbb{Q}[X]$ und $\mathbb{F}_2[X]$ sowie Polynome $g(X), h(X)$ mit $g(X)\, a(X) + h(X)\, b(X) = \mathrm{ggT}(a(X), b(X))$!

$$a(X) := X^3 + 1 \qquad b(X) := X^2 + 1$$

b) Sei $f := X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$, und sei $\alpha := [X]_{(f)} \in \mathbb{F}_3[X]/(f)$. Bestimmen Sie die Inversen von $\alpha^2 + 1$ und $\alpha^2 + \alpha$ in $\mathbb{F}_3[X]/(f)$!

**Aufgabe Ü3** Es seien zwei Polynome $p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]$ mit $q(X) \neq 0$ gegeben. Aus der Schule wissen Sie vielleicht: Um die Stammfunktion der rationalen Funktion $\frac{p(X)}{q(X)}$ zu bestimmen, muss man diese rationale Funktion als eine Summe von rationalen Funktionen schreiben, bei denen im Nenner nur eine Potenz eines linearen Polynoms oder eines quadratischen Polynoms ohne reelle Nullstelle steht. Wir setzen voraus, dass wir eine Faktorisierung $q(X) = q_1(X)^{e_1} \cdots q_k(X)^{e_k}$ mit $e_i \geq 1$ kennen, wobei die $q_i(X)$ entweder linear sind oder quadratisch sind und keine reelle Nullstelle haben. Wie kann man jetzt Resultate der Vorlesung benutzen, um eine gewünschte Darstellung der Form

$$\frac{p(X)}{q(X)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i(X)}{q_i(X)^{e_i}}$$

mit $p_i(X) \in \mathbb{R}[X]$ explizit auszurechnen?

## Schriftliche Hausaufgaben

**Abgabe.** Bis Freitag, 12.12., 10 Uhr.

Jede der folgenden Aufgaben hat 4 Punkte.

**Aufgabe H1** Beweisen Sie Lemmata 1.72 und 1.73 sowie Satz 1.3 im Skript!

**Aufgabe H2**

a) Berechnen Sie mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus jeweils den ggT der folgenden Polynome $a(X), b(X)$ in $\mathbb{F}_3[X], \mathbb{F}_5[X], \mathbb{Q}[X]$ sowie Polynome $g(X), h(X)$ mit $g(X)\,a(X) + h(X)\,b(X) = \mathrm{ggT}(a(X), b(X))$!

$$a(X) := X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1 \qquad b(X) := X^3 + 2X^2 + X + 2$$

b) Sei $f := X^4 + X^3 + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$, und sei $\alpha := [X]_{(f)} \in \mathbb{F}_5[X]/(f)$. Bestimmen Sie das Inverse von $\alpha^2 + 3$ in $\mathbb{F}_3[X]/(f)$!

**Aufgabe H3** Beweisen Sie: Zu jeder Primzahl $p$ gibt es ein irreduzibles Polynom von Grad 2 in $\mathbb{F}_p[X]$. Folgern Sie: Zu jeder Primzahl $p$ gibt es einen Körper mit $p^2$ Elementen.