

LINEARE ALGEBRA FÜR INFORMATIKER
ÜBUNGSBLATT NR. 6

Aufgaben für die Übungsgruppen

Aufgabe Ü1 Sei G eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie die Distributivgesetze des Endomorphismenrings $\text{End}(G)$!

Aufgabe Ü2 Sei H eine Halbgruppe, X eine Menge und $f : H \rightarrow X$ eine bijektive Abbildung. Wir definieren mittels “Strukturtransport” eine Verknüpfung auf X . (Wie geht das?) Zeigen Sie nun, dass diese Verknüpfung assoziativ ist!

Aufgabe Ü3 Seien G, G' abelsche Gruppen, $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus, und sei $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Den Homomorphismus $p : G \rightarrow G/U$, $x \mapsto [x]_U$ nennen wir *kanonischen Homomorphismus*. Zeigen Sie:

a) Es gibt höchstens eine Abbildung $\bar{\varphi} : G/U \rightarrow G'$ so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ p \downarrow & \searrow \varphi & \\ G/U & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & G' \end{array}$$

kommutiert.

- b) Es gibt genau dann eine solche Abbildung, wenn $U \subseteq \text{Kern}(\varphi)$, und diese Abbildung ist dann automatisch ein Gruppenhomomorphismus. (Wir sagen dann, dass φ den Homomorphismus $\bar{\varphi}$ induziert.)
- c) Es gelte $U \subseteq \text{Kern}(\varphi)$. Dann ist $\bar{\varphi}$ genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}(\varphi) = U$.
- d) φ induziert immer einen Isomorphismus $G/\text{Kern}(\varphi) \rightarrow \text{Bild}(\varphi)$.

Aufgabe Ü4 Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m|n$ und $m > 1$. Zeigen Sie: Die Abbildung $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $[a]_n \mapsto [a]_m$ ist wohldefiniert und ein Ringhomomorphismus.

Aufgabe Ü5 Zeigen Sie:

- Für alle $a \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung $m_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $a \mapsto az$ ein Endomorphismus der abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.
- Sei $\text{End}(\mathbb{Z})$ der Endomorphismenring der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$. Dann ist die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \text{End}(\mathbb{Z})$, $a \mapsto m_a$ ein Isomorphismus von Ringen.

Schriftliche Hausaufgaben

Abgabe. Bis Freitag, 28.11, 10 Uhr.

Jede der folgenden Aufgaben hat 4 Punkte.

Vorbemerkung Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl $p \neq 1$ so dass die einzigen natürlichen Zahlen, die p teilen, 1 und p sind.

Für die folgende Aufgabe können Sie die folgende Aussage voraussetzen:

Sei p eine Primzahl. Dann gilt:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : p|ab \longrightarrow p|a \vee p|b$$

Aufgabe H1 Sei p eine Primzahl.

a) Zeigen Sie: Sei $a \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid a$. Dann ist die Abbildung

$$m_a : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, [x]_p \mapsto [x]_p \cdot [a]_p$$

bijektiv.

b) Folgern Sie nun, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper ist.

Hinweis. Berufen Sie sich bei dieser Aufgabe nicht auf Abschnitt 1.9 im Skript! Zeigen Sie zuerst, dass die Abbildung m_a injektiv ist, und beachten Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ endlich ist!

Aufgabe H2 Zeigen Sie:

a) Die Gruppen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sind nicht isomorph.

b) Jede Gruppe mit 4 Elementen ist zu genau einer der obigen Gruppen isomorph.

Anleitung. Es gibt im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, b) zu zeigen. Die eine beruht auf Aussagen von Übungsblatt 4, die andere auf Aussagen von Übungsblatt 5.

Aufgabe H3 Sei G eine abelsche Gruppe, und seien U und V zwei Untergruppen mit $V \subseteq U$ (dann ist V auch eine Untergruppe von U). Zeigen Sie:

a) U/V ist eine Untergruppe von G/V .

b) Der kanonische Homomorphismus $p : G \longrightarrow G/U$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $\bar{p} : G/V \longrightarrow G/U$.

c) Der Homomorphismus $\bar{p} : G/V \longrightarrow G/U$ induziert einen Gruppenisomorphismus $(G/V)/(U/V) \longrightarrow G/U$.

Hinweis. Verwenden Sie Aufgabe Ü3!