Jun.Prof. Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/la

# LINEARE ALGEBRA FÜR INFORMATIKER
# ÜBUNGSBLATT NR. 4

## Aufgaben für die Übungsgruppen

### Aufgabe Ü1

a) Seien $X$ und $Y$ Mengen mit Verknüpfungen. Zeigen Sie: Wenn die Verknüpfungen auf $X$ und $Y$ kommutativ sind, dann ist auch die "komponentenweise" Verknüpfung auf $X \times Y$ kommutativ. Ist auch die Umkehrung dieser Aussage richtig?

b) Seien nun $X$ eine Menge mit einer Verknüpfung und $I$ eine weitere Menge. Zeigen Sie: Wenn die Verknüpfung auf $X$ assoziativ bzw. kommutativ ist, dann trifft dies auch auf die "komponentenweise" Verknüpfung auf $X^I$ zu.

**Aufgabe Ü2** Sei $\mathbb{Q}^*$ die Gruppe $\mathbb{Q} - \{0\}$ mit der Multiplikation. Wie lautet das Erzeugnis $\langle 2, 3, 5 \rangle$ von $2, 3, 5$ in $\mathbb{Q}^*$? Ist $\langle 2 \rangle = \langle -2 \rangle$?

**Aufgabe Ü3** Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Gruppe $S_3 = S(\{1, 2, 3\})$ an! Wie lauten die Untergruppen von $S_3$?

**Aufgabe Ü4** Sei $G$ eine Gruppe und $H$ eine Untergruppe. Wir definieren wie folgt eine Relation $\sim_H$ auf $G$: $x \sim_H y :\Longleftrightarrow x \circ y^{-1} \in H$.

a) Zeigen Sie: Die soeben definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.

b) Für $x \in G$ definieren wir: $H \circ x := \{h \circ x \mid h \in H\}$. Zeigen Sie: $[x]_{\sim_H} = H \circ x$.

c) Diskutieren Sie dies explizit mit Untergruppen von $S_3$!

## Schriftliche Hausaufgaben

**Abgabe.** Bis Freitag, 14.11.

Jede der folgenden Aufgaben hat 4 Punkte.

**Aufgabe H1**

a) Sei $M$ ein additiv geschriebenes additives Monoid, und seien $x_1, \ldots, x_k \in M$. Geben Sie explizit ein Untermonoid $U$ von $M$ an, welches das (bezüglich der Inklusion) kleinste Untermonoid von $M$ ist, das $x_1, \ldots, x_k$ enthält!

b) Sei nun $H$ eine additiv geschriebe Halbgruppe, und seien wieder $x_1, \ldots, x_k \in H$. Geben Sie explizit eine Unterhalbgruppe $U$ von $H$ an, welche die (bezüglich der Inklusion) kleinste Unterhalbgruppe von $H$ ist, die $x_1, \ldots, x_k$ enthält!

Begründen Sie Ihre Antworten!

*Hinweis.* Eine analoge Aussage für abelsche Gruppen wurde in der Vorlesung behandelt.

**Aufgabe H2** Sei $M$ ein Monoid mit neutralem Element $e$ so dass $\forall a \in M : a^2 = e$. Zeigen Sie:

- $M$ ist eine Gruppe.
- $M$ ist abelsch.

**Aufgabe H3**

a) Ein *lateinisches Quadrat* ist eine quadratische Tabelle, deren Einträge Symbole sind so dass jedes Symbol in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vorkommt.

Finden Sie alle lateinischen Quadrate, die die folgende Tabelle vervollständigen!

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |

b) i) Folgern Sie: Jede Gruppe mit 4 Elementen ist abelsch.
ii) Geben Sie eine (möglichst kleine) obere Schranke (d.h. Abschätzung "von oben") für die Anzahl der Verknüpfungen auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ an, die eine Gruppenstruktur definieren so dass 1 das neutrale Element ist!

Begründen Sie Ihre Antwort!

*Hinweis zu b) i).* Sie können OBdA annehmen, dass die Elemente 1,2,3,4 lauten und 1 das neutrale Element ist.

**Zusatzaufgabe (4 Punkte)** Sei $X$ eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $\circ$ und einem Element $e \in X$ so dass

- $\forall a \in X : a \circ e = a$.
- $\forall a \in X \, \exists b \in X : a \circ b = e$.

Zeigen Sie: $(X, \circ)$ ist eine Gruppe mit neutralem Element $e$.

*Hinweis.* Diese Aufgabe ist "elementar" aber nicht einfach. Zeigen Sie zuerst, dass gilt: $\forall a \in X \, \exists b \in X : a \circ b = b \circ a = e$. Benutzen Sie dafür die Voraussetzung mehrfach!