Jun.Prof. Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/~diem/la

LINEARE ALGEBRA FÜR INFORMATIKER
ÜBUNGSBLATT NR. 3

Aufgaben für die Übungsgruppen

Aufgabe Ü1 Seien X, Y Mengen mit $X \neq \emptyset$, sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
- f ist injektiv
- Es gibt eine Abbildung $g : Y \longrightarrow X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

b) Diskutieren Sie, ob auch die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
- f ist surjektiv.
- Es gibt eine Abbildung $g : Y \longrightarrow X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Aufgabe Ü2 Ist die Relation "Teilbarkeit" auf $\mathbb{Z}$ eine Ordnungsrelation? (Die Relation ist $x|y :\Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z} : ax = y$.) Welche Axiome sind erfüllt und welche nicht?

Aufgabe Ü3 Seien X und Y Mengen.

a) Geben Sie eine Menge Ω_{Rel} an, so dass alle Relationen zwischen X und Y Elemente von Ω_{Rel} sind!

b) Geben Sie eine Menge Ω_{Par} an, so dass alle Partitionen von X Elemente von Ω_{Par} sind!

Legen Sie in a) die formale Definition von "Relation" zugrunde! Die gefragten Mengen sind nicht eindeutig bestimmt; versuchen Sie "möglichst einfach" zu definierende Mengen anzugeben. Benutzen Sie dabei in Ihren Definitionen von Ω_{Rel} und Ω_{Par} die Begriffe "Relation" bzw. "Partition" nicht!

Aufgabe Ü4 Sei X eine nicht-leere Menge. In der Vorlesung haben wir jeder Äquivalenzrelation auf X eine Partition von X zugeordnet, und wir haben jeder Partition von X eine Äquivalenzrelation zugeordnet. Sei $\mathcal{A}$ die Menge der Äquivalenzrelation auf X und $\mathcal{P}$ die Menge der Partitionen von X. (Achtung: $\mathcal{P}$ ist keine Potenzmenge!) Dann haben wir also Abbildungen $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}$ und $G : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{A}$.

a) Geben Sie diese Abbildungen (möglichst genau) an!

b) Zeigen Sie, dass $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$, $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Schriftliche Hausaufgaben

Abgabe. Bis Freitag, 7.11., 10:00 in meinem Briefkasten.

Jede der folgenden Aufgaben hat 4 Punkte.

Aufgabe H1

a) Sei X eine Menge und $\leq$ eine Ordnungsrelation auf X. Sei $x \in X$ ein größtes Element. Zeigen Sie: x ist maximal. (Das habe ich schon in der Vorlesung erwähnt.)

b) Sei nun X bezüglich $\leq$ linear geordnet, und sei $x \in X$ ein maximales Element. Zeigen Sie: x ist ein größtes Element. Folgern Sie hieraus: Es gibt höchstens ein maximales Element.

c) Geben Sie ein Beispiel einer linear geordneten Menge an, die kein maximales Element enthält!

Aufgabe H2 Sei X eine nicht-leere Menge, sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Wir definieren wie folgt eine Relation auf X: $x \sim y :\Longleftrightarrow f(x) = f(y)$.

a) Zeigen Sie: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf X.

b) Es gibt genau eine Abbildung $\overline{f} : X_{/\sim} \longrightarrow Y$ mit $\overline{f}([x]_\sim) = f(x)$.

c) $\overline{f}$ ist injektiv.

Aufgabe H3

a) Sei X eine nicht-leere Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $p : X \longrightarrow X_{/\sim}$, $x \mapsto [x]_\sim$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- Die Relation $\sim$ hat ein Repräsentantensystem.
- Es gibt eine Abbildung $g : X_{/\sim} \longrightarrow X$ mit $p \circ g = \mathrm{id}_{X/\sim}$.

b) Beweisen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

- Jede Partition von jeder Menge hat ein Repräsentatensystem.
- Für alle Mengen X, Y und alle surjektiven Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ gilt: Es gibt eine Abbildung $g : Y \longrightarrow X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Bemerkung. Diese Aufgabe ist nicht ganz exakt gestellt, weil nicht gesagt ist, welche Konstruktionen bez. Mengen (und Abbildungen) Sie voraussetzen dürfen. Die Idee ist, nur "elementare" Aussagen über Mengen (und Abbildungen) vorauszusetzen, und insbesondere das Auswahlaxiom nicht vorauszusetzen.

Und noch ein *Hinweis* zu b): Verwenden Sie H2 und a)!