Jun.Prof. Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/la

LINEARE ALGEBRA FÜR INFORMATIKER
ÜBUNGSBLATT NR. 2

Aufgaben für die Übungsgruppen

Aufgabe Ü1 Seien V, W, X, Y, Z Mengen, und seien $f : V \longrightarrow W, g : V \longrightarrow X, h : V \longrightarrow Y, k : W \longrightarrow Y, \ell : X \longrightarrow Y, m : W \longrightarrow Z, n : X \longrightarrow Z$ Abbildungen. Was bedeutet die folgende Aussage?
"Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h"] & W \arrow[d, "k"] \arrow[ddr, "m"] & \\
X \arrow[r, "\ell"] \arrow[drr, "n"'] & Y & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ."

Aufgabe Ü2 Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Seien $U, V \subseteq Y$. Zeigen Sie:

a) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ b) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

c) $Y = U \,\dot\cup\, V \longrightarrow X = f^{-1}(U) \,\dot\cup\, f^{-1}(V)$

Aufgabe Ü3 Seien X und Y endliche Mengen und $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, wobei die y_i paarweise veschieden sind. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Formel:

$$\#f^{-1}(\{y_1\}) + \#f^{-1}(\{y_2\}) + \cdots + \#f^{-1}(\{y_n\}) = \#X$$

Es sei nun nicht mehr vorrausgesetzt, dass X endlich ist. Wenn man dann die Formel "richtig interpretiert", ist sie stets richtig (egal ob X endlich oder unendlich ist). Wie lautet diese Interpretation?

Aufgabe Ü4 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- f ist injektiv.
- f ist surjektiv.
- f ist bijektiv.

Hinweis. Wenden Sie Ü3 an!

Schriftliche Hausaufgaben

Abgabe. Bis Donnerstag, 30.10., 10:00 in meinem Briefkasten im 1. Stock des Mathematikgebäudes (Johannisgasse 26).

Jede der folgenden Aufgaben hat 4 Punkte.

Aufgabe H1

a) Seien X, Y Mengen, sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, und seien U, V Teilmengen von X. Zeigen Sie:

i) $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ ii) $f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V)$.

b) Geben Sie ein Beispiel von Mengen X, Y, einer Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ und zweier Teilmengen U, V von X an, so dass $f(U \cap V) = \emptyset$ und $f(U) = f(V) \neq \emptyset$ gelten.

Aufgabe H2

a) Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

i) $g \circ f$ ist injektiv $\longrightarrow$ f ist injektiv.

ii) $g \circ f$ ist surjektiv $\longrightarrow$ g ist surjektiv.

b) Geben Sie ein Beispiel von drei Mengen X, Y, Z und zwei Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ an so dass $g \circ f$ bijektiv ist aber f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.

c) Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

i) Es gibt genau dann eine Abbildung $g : Y \longrightarrow X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, wenn f bijektiv ist. In diesem Fall gibt es genau eine solche Abbildung: Die Umkehrabbildung f^{-1}.

ii) Sei f nun bijektiv, und sei $h : Y \longrightarrow Z$ eine weitere bijektive Abbildung. Dann ist auch $h \circ f$ bijektiv, und es gilt $(h \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ h^{-1}$

Aufgabe H3 Im Folgenden fixieren wir immer eine Menge X und definieren eine Relation $\sim$ auf X. Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) $X = \mathbb{Z}$, $x \sim y :\Longleftrightarrow x + y$ ist gerade.

b) $X = \mathbb{Z}$, $x \sim y :\Longleftrightarrow x + y$ ist ungerade.

c) $X = \mathbb{Z}$, $x \sim y :\Longleftrightarrow x - y$ ist durch 5 teilbar.

d) $X = \mathbb{Z}$, $x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \geq -1$.

e) $X = \mathbb{Q}$, $x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

f) $X = \mathbb{R} - \{0\}$, $x \sim y :\Longleftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$.