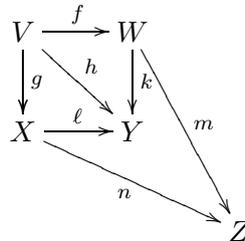


LINEARE ALGEBRA FÜR INFORMATIKER
ÜBUNGSBLATT NR. 2

Aufgaben für die Übungsgruppen

Aufgabe Ü1 Seien V, W, X, Y, Z Mengen, und seien $f : V \rightarrow W, g : V \rightarrow X, h : V \rightarrow Y, k : W \rightarrow Y, \ell : X \rightarrow Y, m : W \rightarrow Z, n : X \rightarrow Z$ Abbildungen. Was bedeutet die folgende Aussage?

“Das Diagramm



ist kommutativ.”

Aufgabe Ü2 Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Seien $U, V \subseteq Y$. Zeigen Sie:

- a) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ b) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$
c) $Y = U \dot{\cup} V \rightarrow X = f^{-1}(U) \dot{\cup} f^{-1}(V)$

Aufgabe Ü3 Seien X und Y endliche Mengen und $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, wobei die y_i paarweise verschieden sind. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Formel:

$$\#f^{-1}(\{y_1\}) + \#f^{-1}(\{y_2\}) + \dots + \#f^{-1}(\{y_n\}) = \#X$$

Es sei nun nicht mehr vorausgesetzt, dass X endlich ist. Wenn man dann die Formel “richtig interpretiert”, ist sie stets richtig (egal ob X endlich oder unendlich ist). Wie lautet diese Interpretation?

Aufgabe Ü4 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- f ist injektiv.
- f ist surjektiv.
- f ist bijektiv.

Hinweis. Wenden Sie Ü3 an!

Schriftliche Hausaufgaben

Abgabe. Bis Donnerstag, 30.10., 10:00 in meinem Briefkasten im 1. Stock des Mathematikgebäudes (Johannissgasse 26).

Jede der folgenden Aufgaben hat 4 Punkte.

Aufgabe H1

a) Seien X, Y Mengen, sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, und seien U, V Teilmengen von X . Zeigen Sie:

$$\text{i) } f(U \cup V) = f(U) \cup f(V) \quad \text{ii) } f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V).$$

b) Geben Sie ein Beispiel von Mengen X, Y , einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und zweier Teilmengen U, V von X an, so dass $f(U \cap V) = \emptyset$ und $f(U) = f(V) \neq \emptyset$ gelten.

Aufgabe H2

a) Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

- i) $g \circ f$ ist injektiv $\rightarrow f$ ist injektiv.
- ii) $g \circ f$ ist surjektiv $\rightarrow g$ ist surjektiv.

b) Geben Sie ein Beispiel von drei Mengen X, Y, Z und zwei Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ an so dass $g \circ f$ bijektiv ist aber f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.

c) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

- i) Es gibt genau dann eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$, wenn f bijektiv ist. In diesem Fall gibt es genau eine solche Abbildung: Die Umkehrabbildung f^{-1} .
- ii) Sei f nun bijektiv, und sei $h : Y \rightarrow Z$ eine weitere bijektive Abbildung. Dann ist auch $h \circ f$ bijektiv, und es gilt $(h \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ h^{-1}$

Aufgabe H3 Im Folgenden fixieren wir immer eine Menge X und definieren eine Relation \sim auf X . Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen? Begründen Sie Ihre Antwort!

- a) $X = \mathbb{Z}$, $x \sim y : \Leftrightarrow x + y$ ist gerade.
- b) $X = \mathbb{Z}$, $x \sim y : \Leftrightarrow x + y$ ist ungerade.
- c) $X = \mathbb{Z}$, $x \sim y : \Leftrightarrow x - y$ ist durch 5 teilbar.
- d) $X = \mathbb{Z}$, $x \sim y : \Leftrightarrow x - y \geq -1$.
- e) $X = \mathbb{Q}$, $x \sim y : \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.
- f) $X = \mathbb{R} - \{0\}$, $x \sim y : \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$.