

LINEARE ALGEBRA FÜR INFORMATIKER
ÜBUNGSBLATT NR. 13

Aufgabe Ü1 Sei K ein Körper und $d \in \mathbb{N}_0$. Sei $K[X]_{\leq d}$ die Menge der Polynome über K vom Grad $\leq d$. Zeigen Sie: Dies ist ein Untervektorraum von $K[X]$, und die Polynome $1, X, X^2, \dots, X^d$ bilden eine Basis dieses Untervektorraums.

Aufgabe Ü2 Sei K ein Körper, und sei A eine $m \times n$ -Matrix über K mit $\text{Rang}(A) = r$. Zeigen Sie: Es gibt invertierbare Matrizen $M \in K^{m \times m}$ und $N \in K^{n \times n}$ so dass

$$MAN = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

wobei alle nicht angegebenen Einträge gleich Null sind und genau r Einsen vorkommen.

Aufgabe Ü3 Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum, und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ ein Untervektorräume. Zeigen Sie: Auch $U_1 \cap U_2$ ist ein Untervektorraum von V .

Aufgabe Ü4 Sei K ein Körper, sei V ein K -Vektorraum, und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Wir definieren $U_1 + U_2 := \{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 \mid \mathfrak{x}_1 \in U_1, \mathfrak{x}_2 \in U_2\}$. Zeigen Sie: Dies ist ein Untervektorraum von V .

Sei nun $U_1 = \langle \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_r \rangle_K, U_2 = \langle \mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_s \rangle_K$. Überlegen Sie sich, dass $U_1 + U_2 = \langle \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_s \rangle_K$ ist!

Aufgabe Ü5 Seien V, U_1, U_2 wie oben, und seien U_1, U_2 endlich erzeugt. Dann gilt mit den obigen Notationen die Formel $\text{Dim}(U_1) + \text{Dim}(U_2) = \text{Dim}(U_1 + U_2) + \text{Dim}(U_1 \cap U_2)$. (Das kommt noch in der Vorlesung.) Machen Sie sich diese Formel im $\mathbb{R}^3$ klar!

Aufgabe Ü6 Seien

$$U_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Q}}, \quad U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Q}}$$

in $\mathbb{Q}^5$. Berechnen Sie jeweils eine Basis von $U_1, U_2, U_1 + U_2$ und berechnen Sie die Dimensionen von $U_1, U_2, U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$!

Schriftliche Hausaufgaben

Abgabe. Bis Freitag, 30.1., 10 Uhr.

Aufgabe H1 Sei $\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ der $\mathbb{Q}$ -Vektorraum der Polynome über $\mathbb{Q}$ vom Grad ≤ 4 und $\mathfrak{B} := (1 + X, X^2 + X^3, X^3, X + X^4, X^4)$.

Sei der Endomorphismus $\varphi : \mathbb{Q}[X]_{\leq 4} \longrightarrow \mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ gegeben durch

$$\varphi(1) := -X, \quad \varphi(X) := -3 - 2X, \quad \varphi(X^2) := -1 + X + 5X^4,$$

$$\varphi(X^3) := -X^2 + 3X^3, \quad \varphi(X^4) := -4 + 5X^4.$$

- Zeigen Sie: $\mathfrak{B}$ ist eine Basis von $\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$.
- Geben Sie die Abbildungsmatrix des Endomorphismus φ bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$ (d.h. die Matrix $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(\varphi)$) an!
- Bestimmen Sie je eine Basis von $\text{Bild}(\varphi)$ und von $\text{Kern}(\varphi)$!

Aufgabe H2 Seien $U, V \subseteq \mathbb{Q}[X]$ die unten angegebene Untervektorräume. Bestimmen Sie jeweils eine Basis von U , V und $U + V$ sowie $\text{Dim}(U)$, $\text{Dim}(V)$, $\text{Dim}(U + V)$ und $\text{Dim}(U \cap V)$!

$$U := \langle 1 - X^2 + X^3 - X^4, X - X^2 + 2X^4 + X^5, 2 + X - X^2 + X^3 - X^5 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$V := \langle -1 + 2X - X^2 + X^3 + X^5, 2X + X^3 - X^4 - X^5, -1 - 2X - X^2 - X^3 + 2X^4 + 3X^5 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

Aufgabe H3 Sei V ein $\mathbb{Q}$ -Vektorraum mit Basis $\mathfrak{B} = (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$. Sei $\mathfrak{B}' := (\mathfrak{b}'_1, \mathfrak{b}'_2, \mathfrak{b}'_3)$ mit

$$\mathfrak{b}'_1 = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}'_2 = -2\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}'_3 = \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{b}_3.$$

- Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}'$ eine Basis von V ist!
- Geben Sie die Übergangsmatrix von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{B}'$ sowie die Übergangsmatrix von $\mathfrak{B}'$ nach $\mathfrak{B}$ an!
- Geben Sie jeweils die Koordinatenvektoren von

i) $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ bezüglich $\mathfrak{B}$

ii) $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ bezüglich $\mathfrak{B}'$

iii) $\mathfrak{b}'_1, \mathfrak{b}'_2, \mathfrak{b}'_3$ bezüglich $\mathfrak{B}$

iv) $\mathfrak{b}'_1, \mathfrak{b}'_2, \mathfrak{b}'_3$ bezüglich $\mathfrak{B}'$

an!

- Sei $\varphi : V \longrightarrow V$ der eindeutig bestimmte Endomorphismus mit $\varphi(\mathfrak{b}_1) = -\mathfrak{b}_1 + 2\mathfrak{b}_2 + 2\mathfrak{b}_3$, $\varphi(\mathfrak{b}_2) = 2\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_2 - 2\mathfrak{b}_3$, $\varphi(\mathfrak{b}_3) = -2\mathfrak{b}_1 + 2\mathfrak{b}_2 + 3\mathfrak{b}_3$.
Geben Sie jeweils

i) die Abbildungsmatrix von φ bezüglich $\mathfrak{B}$ (d.h. $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(\varphi)$)

ii) die Abbildungsmatrix von φ bezüglich $\mathfrak{B}'$ (d.h. $M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}(\varphi)$)

an!