Jun.-Prof. Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/~diem/la

LINEARE ALGEBRA FÜR INFORMATIKER
ÜBUNGSBLATT NR. 12

Aufgaben für die Übungsgruppen

Aufgabe Ü1 Berechnen Sie für jede der folgenden Matrizen (genannt A) über $\mathbb{C}$ eine invertierbare Matrix M und eine Matrix in reduzierter (Zeilen-)Stufenform $\tilde{A}$ so dass $MA = \tilde{A}$. Welche der Matrizen ist invertierbar? Wie lautet dann die inverse Matrix? Hierbei ist A jeweils gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 1+i & 1 & -1 \\ 2 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \pi & 1 \\ 2 & -1 & \pi \\ 0 & \pi & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{C})$$

Aufgabe Ü2 Zeigen Sie die folgende Aussage: Sei K ein Körper Sei $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ eine Basis von K^n, und seien $\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_r \in K^n$ linear unabhängig mit

$$\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \rangle_K = \langle \underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_r \rangle_K \, .$$

Dann bilden auch $\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_r, \underline{x}_{r+1}, \ldots, \underline{x}_n$ eine Basis von V.
(Die Vorausssetzung, dass $\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_r \in V$ linear unabhängig sind, kann man weglassen.)

Aufgabe Ü3

a) Berechnen Sie eine "schöne Basis" des linearen Unterraums

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{Q}}$$

von $\mathbb{Q}^4$!

b) Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{Q}^4$!

c) Überprüfen Sie, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind und ergänzen Sie sie zu einer Basis von $\mathbb{Q}^4$!

Schriftliche Hausaufgaben

Abgabe. Bis Freitag, 23.1., 10 Uhr.

Aufgabe H1 Berechnen Sie für jede der folgenden Matrizen (genannt A) über $\mathbb{Q}$ eine invertierbare Matrix M und eine Matrix in reduzierter (Zeilen-)Stufenform $\tilde{A}$ so dass $MA = \tilde{A}$. Hierbei ist A jeweils gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & a \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{Q}) \,.$$

Aufgabe H2 Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar? Berechnen Sie ggf. die inverse Matrix!

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 & -1 \\ i & 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4} \qquad \begin{pmatrix} \pi & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \pi \\ 2\pi+1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha+1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha+1 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \in K^{4\times 4} \,,$$

wobei $K := \mathbb{F}_2[X]/(f(X))$ mit $f(X) := X^2 + X + 1$ und $\alpha := [X]_{(f(X))}$.

Aufgabe H3

a) Berechnen Sie eine "schöne Basis" des linearen Unterraums

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Q}}$$

von $\mathbb{Q}^4$!

b) Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{Q}^4$!

c) Überprüfen Sie, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind und ergänzen Sie sie zu einer Basis von $\mathbb{Q}^5$!