Jun.-Prof. Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/∼diem/la

LINEARE ALGEBRA FÜR INFORMATIKER
ÜBUNGSBLATT NR. 11

Aufgaben für die Übungsgruppen

Aufgabe Ü1 Überprüfen Sie noch einmal die Distributivgesetze und das Assoziativgesetz für Matrizen!

Aufgabe Ü2 Sei K ein Körper. Für $A = ((a_{i,j}))_{i=1\ldots m, j=1,\ldots n} \in K^{m\times n}$ definieren wir die *transponierte Matrix* als

$$A^t := ((a_{j,i}))_{i=1\ldots n, j=1,\ldots m} \in K^{n\times m} \ .$$

Wenn wir $A^t = ((a'_{i,j}))_{i,j}$ schreiben, wie lautet dann also $a'_{i,j}$?
Zeigen Sie: Für $A \in K^{m\times n}$ und $B^{n\times r}$ gilt:

$$(AB)^t = B^t A^t \ .$$

Warum kann man eigentlich B^t und A^t multiplizieren? Welches Format hat das Ergebnis?
Rechnen Sie ein paar Beispiele durch!
Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn A^t invertierbar ist.
Zeigen Sie: Transponieren ist ein Isomorphismus von Gruppen von $(K^{n\times m}, +)$ nach $(K^{m\times n}, +)$.
Ist Transponieren ein Automorphismus des Rings $K^{n\times n}$?

Aufgabe Ü3 Berechnen Sie für jede der folgenden Matrizen (genannt A) über $\mathbb{Q}$ jeweils eine Basis von Kern(A) und Bild(A)!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe Ü4 Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine Menge und eine Ordnung an, so dass sich der Begriff "maximales linear unabhängiges System" (in K^n) als Spezialfall der Definitionen eines "maximalen Elements" erweist!
Sei nun U ein linearer Unterraum von K^n. Geben Sie nun eine Menge und eine Ordnung an, so dass sich der Begriff "mimimales Erzeugendensystem von U" als Spezialfall der Definition eines "minimalen Elements" erweist!

Schriftliche Hausaufgaben

Abgabe. Bis Freitag, 16.1., 10 Uhr.

Aufgabe H1 Sei K ein Körper, und sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren für jede Permutation $\pi \in S_n$ die zugehörige *Permutationsmatrix* M_π durch

$$M_\pi := (\underline{e}_{\pi(1)} | \cdots | \underline{e}_{\pi(n)}) \ .$$

a) Geben Sie für $n = 2$ und $n = 3$ für jede Permutation die entsprechende Matrix an!

b) Sei $\pi \in S_n$, und seien $i, j = 1, \ldots, n$. Wie kann man dann den Eintrag mit Index (i, j) der Matrix M_π mittels des Kronecker-Deltas ausdrücken? Wie kann man dann die ganze Matrix M_π mittels des Kronecker-Deltas beschreiben?

c) Beweisen Sie (möglichst formal): Jede Permutationsmatrix ist invertierbar und die Abbildung $S_n \longrightarrow (K^{n \times n})^*, \pi \mapsto M_\pi$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe H2 Berechnen Sie für die jedes der folgenden Systeme $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ in $\mathbb{Q}^4$ jeweils ein Teilsystem, das eine Basis von $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n \rangle_{\mathbb{Q}}$ ist! Dabei ist $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ jeweils gleich:

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe H3 Berechnen Sie für jede der folgenden Matrizen (genannt A) über $\mathbb{F}_7$ und über $\mathbb{Q}$ jeweils eine Basis von Kern(A) und Bild(A)!

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2+a \end{pmatrix},$$

wobei a ein beliebiges Element aus $\mathbb{F}_7$ beziehungsweise $\mathbb{Q}$ ist.