Jun.Prof. Dr. C. Diem
diem@math.uni-leipzig.de
http://www.math.uni-leipzig.de/~diem/la

LINEARE ALGEBRA FÜR INFORMATIKER
ÜBUNGSBLATT NR. 1

Aufgaben für die Übungsgruppen

Aufgabe Ü1 Beweisen Sie mittels Wahrheitstabellen die "Distributivgesetze" für Aussagen. D.h.: Seien A, B, C drei (sinnvolle) mathematische Aussagen. Dann sind äquivalent:

- $A \wedge (B \vee C)$
- $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

sowie:

- $A \vee (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Aufgabe Ü2 Geben Sie einen Beweis für die folgende Aussage: Es gibt keine rationale Zahl a mit $a^2 = 2$.

Aufgabe Ü3 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Schriftliche Hausaufgaben

Abgabe. Bis Freitag, 24.10., 10:00 in meinem Briefkasten im 1. Stock des Mathematikgebäudes (Johannisgasse 26).

Jede der folgenden Aufgaben hat 4 Punkte.

Aufgabe H1 Seien A, B, C drei (sinnvolle) mathematische Aussagen.

a) Zeigen Sie mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

- $A \longrightarrow (B \longrightarrow C)$
- $(A \wedge B) \longrightarrow C$

b) Wir wissen, dass für je zwei Aussagen A, B die Aussage $A \longrightarrow B$ äquivalent zu $\neg(A \wedge \neg B)$ ist. Formen Sie mittels solcher Äquivalenzen die beiden obigen Aussagen in Aussagen um, die nur die Verknüpfungen $\neg$ und $\wedge$ enthalten. Zeigen Sie dann (erneut), dass die beiden Aussagen äquivalent sind, ohne nun jedoch eine Wahrheitstabelle zu benutzen.

Aufgabe H2 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

Zeigen Sie nun:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Aufgabe H3 Seien a und b ganze Zahlen. Dann sagen wir *a teilt b*, falls es eine ganze Zahl z mit $za = b$ gibt. In diesem Fall schreiben wir $a|b$. Wenn dies nicht der Fall ist, sagen wir, *a teilt b nicht*, und wir schreiben $a \nmid b$. Wie Sie sicher wissen, ist eine *Primzahl* per Definition eine natürliche Zahl $p \neq \mathbf{1}$ so dass die einzigen natürlichen Zahlen, die p teilen, 1 und p sind.

a) Geben Sie eine formale Definition von "p ist eine Primzahl" unter Verwendung des All-Quantors, Existenz-Quantors, Implikationspfeilen etc.

b) Geben Sie einen Beweis der folgenden Aussage an: Seien $z_1, \ldots, z_k$ natürliche Zahlen, die alle > 1 sind. Dann wird $z_1 z_2 \cdots z_k + 1$ von keinem der z_i geteilt.

c) Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen.