Test 2 zur Linearen Algebra
19.1.2009

Vorname ....

Name ....

Übungsgruppe ....

Matrikel-Nr. ....

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	6	6	6	6	24
erreichte Punkte					

Bitte füllen Sie dieses Deckblatt aus und geben Sie es **zusammen** mit Ihren Bearbeitungen der Aufgaben ab!

Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen!

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen ist immer wahr (**w**) oder manchmal falsch (**f**)? Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen – aber man bekommt mindestens Null Punkt auf die Aufgabe als ganzes. Sie dürfen sich enthalten.

Sei im folgenden K stets ein Körper.

a) Sei $A \in K^{m\times n}$ und $\underline{b} \in K^n$. Dann ist das LGS $A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{b}$ genau dann lösbar, wenn $\underline{b}$ von den Spalten von A linear abhängig ist.

b) Sei $A \in K^{m\times n}$ und sei $\tilde{A}$ die Zeilennormalform von A. Dann sind die Spalten von A genau dann linear unabhängig, wenn $\tilde{A}$ keine Nullzeile enthält.

c) Sei $A \in K^{m\times n}$ mit $m > n$. Dann sind die Spalten von A linear unabhängig.

d) Sei $A \in K^{m\times n}$ mit $m > n$. Dann bilden die Spalten von A ein Erzeugendensystem.

e) Seien $A \in K^{m\times(m-1)}$ und $B \in K^{(m-1)\times m}$. Dann ist $AB \in K^{m\times m}$ nicht invertierbar.

f) Seien $A \in K^{m\times(m+1)}$ und $B \in K^{(m+1)\times m}$. Dann ist $AB \in K^{m\times m}$ nicht invertierbar.

Lösungen

a)	b)	c)	d)	e)	f)

Aufgabe 2

a) Seien die Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ wie folgt definiert:

$$f := X^3 - 1 \quad , \quad g := X^2 + X + 3$$

Berechnen Sie Polynome $\mathrm{ggT}(f,g)$ und $a, b \in \mathbb{Q}[X]$ so dass $af + bg = \mathrm{ggT}(f,g)$! Ist $[g]_{(f)} \in \mathbb{Q}[X]/(f)$ invertierbar? Wenn ja, wie lautet das Inverse?

b) Seien nun Polynome $f, g \in \mathbb{F}_5[X]$ mit den obigen Formeln definiert. Berechnen Sie nun Polynome $\mathrm{ggT}(f,g)$ und $a, b \in \mathbb{F}_5[X]$ so dass $af + bg = \mathrm{ggT}(f,g)$! Ist nun $[g]_{(f)} \in \mathbb{F}_5[X]/(f)$ inverbierbar? Wenn ja, wie lautet das Inverse?

Aufgabe 3 Sei für $a \in \mathbb{Q}$ die Matrix $A \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ wie folgt definiert:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie nun in Abhängigkeit von a jeweils eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$ und von $\mathrm{Bild}(A)$!

Aufgabe 4 Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und seien $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n \in K^n$. Zeigen Sie mit Resultaten aus der Vorlesung, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- Die Vektoren $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n \in K^n$ sind linear unabhängig.
- Die Vektoren $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n \in K^n$ bilden ein Erzeugendensystem von K^n.
- Die Vektoren $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n \in K^n$ bilden eine Basis von K^n.