Bemerkung Die Invarianz (2.13) kann man mittels Matrizenmultiplikation auch so zeigen: Wie gesagt korrespondiert jede elementare Spaltentransformation zu einer Multiplikation mit einer bestimmten invertierbaren Matrix von rechts.

Sei $A \in K^{n\times r}$ die Ausgangsmatrix und M eine beliebige invertierbare $r \times r$-Matrix. Dann ist

$$\text{Bild}(\Lambda_{AM}) = \text{Bild}(\Lambda_A \circ \Lambda_M) = \text{Bild}(\Lambda_A) \ ,$$

da $\Lambda_M : K^r \longrightarrow K^r$ surjektiv (sogar bijektiv) ist. Es ist aber $\text{Bild}(\Lambda_A)$ der von den Spalten von A aufgespannte Raum und $\text{Bild}(\Lambda_{AM})$ der von den Spalten von AM aufgespannte Raum.

2.5 Vektorräume

Sei nach wie vor K ein Körper. Das Konzept eines *Vektorraums* ist eine Verallgemeinerung des K^n.

Definition Ein K-*Vektorraum* (oder ein *Vektorraum über* K) ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung (genannt *Skalarmultiplikation* (von K auf V))

$$\cdot : \ K \times V \longrightarrow V, (a, \mathfrak{x}) \mapsto a \cdot \mathfrak{x}$$

so dass

- $\forall a \in K \, \forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V \ : a(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = a\mathfrak{x} + a\mathfrak{y}$
- $\forall a, b \in K \, \forall \mathfrak{x} \in V \ : a(b\mathfrak{x}) = (ab)\mathfrak{x}$
- $\forall a, b \in K \, \forall \mathfrak{x} \in V \ : (a + b)\mathfrak{x} = a\mathfrak{x} + b\mathfrak{x}$
- $\forall \mathfrak{x} \in V \ : 1_K \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{x}$

Hier haben wir (wie üblich) die Multiplikationspunkte weggelassen und die Regel ("Mal vor Plus") angewandt.

Notation Das Nullelement benzeichnen wir mit $\mathfrak{o}$.

Sprachgebrauch Die Elemente eines Vektorraums heißen *Vektoren*, und die Elemente dem Grundkörper *Skalare*. Beachten Sie, dass der Begriff eines Vektorraums abstrakt ist; insbesondere sind die Elemente eines Vektorraums nicht notwendigerweise in irgendeinem anschaulichen Sinn Vektoren.

Bemerkung / Frage Es gilt immer $-\mathfrak{x} = (-1) \cdot \mathfrak{x}$. Warum?

Einige Beispiele:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist K^n mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum.
- Die "triviale Gruppe" $\{0\}$ ist in offensichtlicher Weise ein K-Vektorraum. (Man setzt $K^0 := \{0\}$.)
- Der Körper K ist mit seiner Addition und Multiplikation ein K-Vektorraum. ("Im Wesentlichen" ist $K = K^1$, siehe unten.)
- Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge der $m \times n$-Matrizen $K^{m \times n}$ mit der üblichen Addition und der auf S. 91 definierten Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum.

Und noch zwei wichtige Beispiele:

Beispiel 2.26 Sei L ein Körper und $K \subseteq L$ ein Unterkörper. Dann ist L in "natürlicher Weise" ein K-Vektorraum, und zwar wie folgt: $(L, +)$ ist eine abelsche Gruppe, und wenn wir die Multiplikation $\cdot : L \times L \longrightarrow L$ auf $K \times L$ einschränken, erhalten wir eine Skalarmultiplikation von K auf L.

Es ist offensichtlich, dass die vier Vektorraumaxiome gelten.

Beispiel 2.27 Der Polynomring $K[X]$ ist mit der üblichen Addition und der Skalarmultiplikation $K \times K[X] \longrightarrow K[X]\,, (c, \sum_{i=0}^{n} a_i X^i) \mapsto \sum_{i=0}^{n} c a_i X^i$ ein K-Vektorraum.

Aus Abschnitt 1.8 wissen Sie, dass man, immer wenn eine neue Art von mathematischen "Objekten" eingeführt wird, fragen sollte: *Wie lauten die zugehörigen Morphismen?*

Die Morphismen sind hier die *linearen Abbildungen*, die genau so definiert sind wie zuvor:

Definition Seien V und W K-Vektorräume. Eine K-*lineare Abbildung* (kurz: eine *lineare Abbildung*) von V nach W ist eine Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ so dass

- $\forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V : \varphi(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = \varphi(\mathfrak{x}) + \varphi(\mathfrak{y})$
- $\forall a \in K\ \forall \mathfrak{x} \in V : \varphi(a\mathfrak{x}) = a\varphi(\mathfrak{x})$.

Bemerkung Seien V, W K-Vektorräume. Dann ist eine Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ genau dann linear, wenn für alle $a \in K$ und alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$ $\varphi(a\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = a\varphi(\mathfrak{x}) + \varphi(\mathfrak{y})$ gilt.

Lemma 2.28

a) Wenn $\varphi : V \longrightarrow W$ und $\psi : W \longrightarrow X$ lineare Abbildungen von K-Vektoräumen sind, dann auch $\psi \circ \varphi : V \longrightarrow X$.

b) Wenn $\varphi, \psi : V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen von K-Vektorräumen sind, dann auch $\varphi + \psi : V \longrightarrow W, \mathfrak{x} \mapsto \varphi(\mathfrak{x}) + \psi(\mathfrak{x})$.

c) Wenn $a \in K$ und $\varphi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildungen von K-Vektorräumen ist, dann auch $a\varphi : V \longrightarrow W, \mathfrak{x} \mapsto a\varphi(\mathfrak{x})$.

d) Wenn $\varphi : V \longrightarrow W$ eine bijektive lineare Abbildung von K-Vektorräumen ist, dann ist auch $\varphi^{-1} : W \longrightarrow V$ linear.

Die K-linearen Abbildungen nennt man auch von *Homomorphismen* von K-Vektorräumen. (Entsprechend der Philosophie von Abschnitt 1.8.

Dementsprechend bezeichnet man die Menge der K-linearen Abbildungen von V nach W mit $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ (oder einfach mit $\mathrm{Hom}(V, W)$, wenn es klar ist, dass man "über dem Körper K" arbeitet). Insbesondere ist also $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ die Menge der linearen Abbildungen von K^n nach K^m (die bisher keine Bezeichnung hatte). Beachten Sie, dass $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit der in Lemma 2.28 b) definierten Addition eine abelsche Gruppe ist.

Ferner ist $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit dieser Addition und der in Lemma 2.28 c) definierten Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum (überprüfen Sie dies!).

Wir wenden nun auch die anderen Begriffe aus Abschnitt 1.8 auf lineare Abbildungen an:

- Ein *Isomorphismus* von V nach W (beides K-Vektorräume) ist eine lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ so dass es eine lineare Abbildung $\psi : W \longrightarrow V$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$ existiert. (Nach Lemma 2.28 d) ist dies äquivalent dazu, dass φ eine bijektive lineare Abbildung ist.) Wenn es einen Isomorphismus zwischen V und W gibt, heißen V und W *isomorph*.

- Ein *Endomorphismus* eines K-Vektorraums V ist eine lineare Abbildung von V nach V.

- Ein *Automorphismus* eines K-Vektorraums V ist ein Isomorphismus von V nach V.

Die Bezeichnungen für die entsprechenden Mengen sind $\mathrm{Iso}_K(V,W), \mathrm{End}_K(V)$ und $\mathrm{Aut}_K(V)$, wobei das K auch weggelassen werden kann. (Beachten Sie, dass die letzeren beiden Bezeichungen analog zu den Bezeichnungen in Abschnitt 1.8 sind.)

Es ist klar, dass $\mathrm{End}_K(V)$ mit der schon diskutierten Addition und der Verknüpfung als Multiplikation ein Ring ist, und $\mathrm{Aut}_K(V)$ ist mit der Verknüpfung eine Gruppe. Dabei ist $\mathrm{Aut}_K(V)$ gleich der Gruppe der (bez. der Multiplikation) invertierbaren Elemente von $\mathrm{End}_K(V)$, also $\mathrm{End}_K(V)^* = \mathrm{Aut}_K(V)$ (vergleiche die letzte Aussage mit Aussage 1.63). Aussage 2.16 besagt, dass die Abbildungen $\mathrm{End}_K(K^n) \longrightarrow K^{n\times n}, \varphi \mapsto M(\varphi)$ und $K^{n\times n} \longrightarrow \mathrm{End}_K(K^n), A \mapsto \Lambda_A$ zueinander inverse Isomorphismen von Ringen sind.

Und nun noch einige Beispiele für Isomorphismen von K-Vektorräumen:

Beispiel 2.29 Die Abbildung $K \longrightarrow K^1, x \mapsto (x)$ (wobei (x) das "1-Tupel" ist, dass x enthält) ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen. (Wir identifizieren diese beiden Vektorräume.)

Beispiel 2.30 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann ist das Transponieren $K^{m\times n} \longrightarrow K^{n\times m}, A \mapsto A^t$ ein Isomorphismus von K-Vektorräumen. Insbesondere ist also der Raum der *Zeilenvektoren* der Länge n isomorph zum Raum der Spaltenvektoren der Länge n (über K).

Beispiel 2.31 Die lineare Abbildung

$$K^{m\times n} \longrightarrow K^{m\cdot n}, A = ((a_{i,j}))_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n} \mapsto \underline{y} \text{ mit } y_{(j-1)\cdot m+i} := a_{i,j}$$

für alle $i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n$ ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beispiel 2.32 Die Abbildungen $\mathrm{Hom}_K(K^m, K^n) \longrightarrow K^{m\times n}, \varphi \mapsto M(\varphi)$ und $K^{m\times n} \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K^m, K^n), A \mapsto \Lambda_A$ sind zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen.

Definition Sei V ein K-Vektorraum. Dann heißen die linearen Abbildungen $V \longrightarrow K$ *Linearformen* auf V.

Das obige Beispiel besagt insbesondere, dass der Raum $\mathrm{Hom}_K(K^n, K)$ der Linearformen auf K^n isomorph zum Raum der *Zeilenvektoren* der Länge n über K ist.

Bemerkung Wir haben gesehen, dass das Transponieren einen Isomorphismus zwischen dem Raum der Zeielenvektoren der Länge n und dem Raum der Spaltenvektoren der Länge n definiert. Man könnte sagen, dass es sowieso egal ist, ob man einen Vektor als Zeile oder als Spalte schreibt. Man sollte aber *nicht* beliebig zwischen Spalten- und Zeilenvektoren hin- und herwechseln: Viele Argumente sind viel übersichtlicher, wenn man die Elemente von K^n mit Spalten beschreibt und Zeilenvektoren benutzt, um Linearformen anzugeben.

Bemerkung / Definition Sei V ein K-Vektorraum, und sei $U \subseteq V$ mit $\mathfrak{o} \in U$ so dass U abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation ist (d.h. $\forall a \in K \, \forall \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in U : \mathfrak{x} + \mathfrak{y} \in U, a\mathfrak{x} \in U$). Dann ist U mit der induzierten Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum; genannt ein *Untervektorraum* von V.

Bemerkung Die Untervektorräume des K^n sind genau die linearen Unterräume.

Lemma 2.33 *Seien V, W K-Vektorräume, $\varphi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann ist* Kern(φ) *ein Untervektorraum von V, und* Bild(φ) *ist ein Untervektorraum von W.*

Der *Beweis* ist offensichtlich. □

2.6 Endlich erzeugte Vektorräume

Systeme von Vektoren

Sei V ein K-Vektorraum. Sei $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ ein endliches System von Vektoren aus V. Dann definiert man in offensichtlicher Verallgemeinerung der Definitionen in Abschnitt 2.1:

Definition

- $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ bilden ein *Erzeugendensystem* von V, wenn gilt: Für alle $\mathfrak{x} \in V$ gibt es $a_1, \ldots, a_r \in K$ mit $\mathfrak{x} = a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots a_r\mathfrak{x}_r$.
- $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ bilden eine *Basis* von V, wenn gilt: Für alle $\mathfrak{x} \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $a_1, \ldots, a_r \in K$ mit $\mathfrak{x} = a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots a_r\mathfrak{x}_r$.

Beispiel 2.34 Wie wir schon wissen, bilden die Standardvektoren $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_r$ eine Basis von K^r. Man spricht von der *Standardbasis* des K^r.

Man definiert den von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ *erzeugten* (oder *aufgespannten*) *Untervektorraum* als

$$\langle \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r \rangle_K := \{ a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{x}_r \mid a_1, \ldots, a_r \in K \} .$$

Dies ist nun der kleinste Untervektorraum von V (bez. der Inklusion), der $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ enthält.

Aussage 2.35 *Sei $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r \in V$ eine Basis. Sei W ein weiterer K-Vektorraum, und seien $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r \in W$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ mit $\varphi(\mathfrak{b}_i) = \mathfrak{x}_i$ für alle $i = 1, \ldots, r$, und diese ist durch $\varphi(a_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{b}_r) = a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{x}_r$ für $a_1, \ldots, a_r \in K$ gegeben. Dabei gilt* $\mathrm{Bild}(\varphi) = \langle \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r \rangle_K$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Sei $\mathfrak{x} \in V$. Dann gibt es (eindeutig bestimmte) $a_1, \ldots, a_r \in K$ mit $\mathfrak{x} = a_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{b}_r$. Nun ist $\varphi(\mathfrak{x}) = \varphi(a_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{b}_r) = a_1\varphi(\mathfrak{b}_1) + \cdots + a_r\varphi(\mathfrak{b}_r) = a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{x}_r$.

Nun müssen wir noch nachweisen, dass es tatsächlich so eine lineare Abbildung gibt. Sei dazu wiederum $\mathfrak{x} \in V$ beliebig. Wie schon gesagt gibt es eindeutig bestimmte $a_1, \ldots, a_r \in K$ mit $\mathfrak{x} = a_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{b}_r$. Wir setzen nun $\varphi(\mathfrak{x}) := a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{x}_r$. Dies ist wohldefiniert, da die "Koeffizienten" $a_1, \ldots, a_r$ eindeutig sind.

Wir müssen noch die Linearität nachweisen.

Seien dazu $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$ und $c \in K$. Sei $\mathfrak{x} = a_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{b}_r$ und $\mathfrak{y} = b_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + b_r\mathfrak{b}_r$.

Dann ist $\varphi(c \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = \varphi(ca_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + ca_r\mathfrak{b}_r + b_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + b_r\mathfrak{b}_r) = \varphi((ca_1 + b_1)\mathfrak{b}_1 + \cdots + (ca_r + b_r)\mathfrak{b}_r) \overset{\text{per Def.}}{=} (ca_1 + b_1)\mathfrak{x}_1 + \cdots + (ca_r + b_r)\mathfrak{x}_r = c(a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{x}_r) + (b_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + b_r\mathfrak{x}_r) \overset{\text{per Def.}}{=} c\varphi(a_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{b}_r) + \varphi(b_1\mathfrak{b}_1 + \cdots + b_r\mathfrak{b}_r) = c\varphi(\mathfrak{x}) + \varphi(\mathfrak{y})$.

Die Aussage über das Bild folgt sofort aus der Definition von φ. □

Als Spezialfall des obigen Aussage erhalten wir: Sei V ein K-Vektorraum, und seien $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k \in V$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : K^r \longrightarrow V$ mit $\varphi(\underline{e}_i) = \mathfrak{x}_i$ für $i = 1, \ldots, r$. Explizit ist diese Abbildung durch

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \right) = a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{x}_r$$

gegeben.

Offensichtlich sind nun die folgenden Aussagen jeweils äquivalent:

- $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ ist ein Erzeugendensystem von V.

- $\langle \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r \rangle_K = V$
- Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi : K^r \longrightarrow V$ mit $\varphi(\underline{e}_i) = \mathfrak{x}_i$ ist surjektiv.

Sowie:

- $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ ist eine Basis von V.
- Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi : K^r \longrightarrow V$ mit $\varphi(\underline{e}_i) = \mathfrak{x}_i$ ist bijektiv (d.h. ein Isomorphismus).

Definition Sei $\mathfrak{x} \in V$. Dann ist $\mathfrak{x}$ *linear abhängig* von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$, wenn es $a_1, \ldots, a_r \in K$ mit $\mathfrak{x} = a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{x}_r$ gibt. Wenn dies nicht der Fall ist, heißt $\mathfrak{x}$ *linear unabhängig* von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$.

Definition Die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ heißen *linear unabhängig*, wenn keiner der Vektoren von den anderen linear abhängig ist.

Wir haben die folgende offensichtliche Verallgemeinerung von Lemma 2.7:

Lemma 2.36 *Die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ sind genau dann linear unabhängig, wenn gilt:*

$$\forall a_1, \ldots, a_r \in K : a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{x}_r = 0 \longrightarrow a_1 = \cdots = a_r = 0 \, .$$

Somit sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- Die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ sind linear unabhängig.
- Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi : K^r \longrightarrow V$ mit $\varphi(\underline{e}_i) = \mathfrak{x}_i$ ist injektiv.

Auch die Definitionen von "maximales linear unabhängiges System" und "minimales Erzeugendensystem" verallgemeinern sich sofort. Damit haben wir:

Aussage 2.37 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ *ist eine Basis von* V.

b) $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ *ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.*

c) $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ *ist ein maximales linear unabhängiges System.*

d) $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ *ist ein minimales Erzeugendensystem.*

e) Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi : K^r \longrightarrow V$ *mit* $\varphi(\underline{e}_i) = \mathfrak{x}_i$ *für alle* $i = 1, \ldots, r$ *ist ein Isomorphismus.*

Der *Beweis* der Äquivalenzen von Aussage 2.8 gilt wörtlich auch hier. Oben haben wir bereits gesehen, dass a) und e) äquivalent sind. □

Lemma 2.38 *Seien* V, W K*-Vektorräume, seien* $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r \in V$, *und sei* $\varphi : V \longrightarrow W$ *eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

a) Wenn $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ *ein Erzeugendensystem von* V *bilden, dann bilden* $\varphi(\mathfrak{x}_1), \ldots, \varphi(\mathfrak{x}_r)$ *ein Erzeugendensystem von* $\mathrm{Bild}(V)$. *Wenn also zusätzlich* φ *surjektiv ist, bilden sie auch ein Erzeugendensystem von* W.

b) Wenn $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ *linear unabhängig sind und* φ *injektiv ist, dann sind auch* $\varphi(\mathfrak{x}_1), \ldots, \varphi(\mathfrak{x}_r)$ *linear unabhängig.*

c) Wenn φ *ein Isomorphismus ist, dann bilden* $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ *genau dann eine Basis von* V, *wenn* $\varphi(\mathfrak{x}_1), \ldots, \varphi(\mathfrak{x}_r)$ *eine Basis von* W *bilden.*

(Das ist leicht.)

Aussage 2.39 *Sei* $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ *ein Ereugendensystem von* V. *Dann gibt es ein Teilsystem von* $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$, *das eine Basis von* V *ist.*

Beweisskizze. Sei $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ ein Erzeugendensystem. Dann gibt es zwei Fälle: Entweder $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ ist linear unahbängig, also eine Basis, oder einer der Vektoren ist linear abhängig von den anderen. Dann lassen wir diesen Vektor weg. Wenn man diese Prozedur iteriert, erhält man irgendwann ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis.

(In einem formalen Beweis sollte man vollständige Induktion benutzen.) □

Definition Der Vektorraum V heißt *endlich erzeugt*, wenn er ein Erzeugendensystem $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ hat.

Wir werden uns im Folgenden fast ausschließlich auf endlich erzeugte Vektorräume beschränken.

Nach Aussage 2.39 gilt insbesondere:

Aussage 2.40 *Sei* V *endlich erzeugt. Dann hat* V *eine Basis.*

Satz 2.3 *Sei* V *endlich erzeugt, und sei* $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ *eine Basis. Dann gilt:*

- *Jedes Erzeugendensystem von* V *enthält mindestens* n *Vektoren.*

- *Jedes linear unabhängige System von V enthält höchstens n Vektoren.*
- *Jede Basis von V enthält genau n Vektoren.*

Beweis. Sei $\varphi : K^n \longrightarrow V$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $\varphi(\underline{e}_i) = \mathfrak{x}_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Da $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ eine Basis ist, ist dies ein Isomorphismus.

Seien $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_r \in V$.

Wenn die Vektoren $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_r$ ein Erzeugendensystem von V bilden, dann bilden $\varphi^{-1}(\mathfrak{x}_1), \ldots, \varphi^{-1}(\mathfrak{x}_r)$ ein Erzeugendensystem von K^n. Damit gilt nach Aussage 2.13 $r \geq n$.

Wenn $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_r$ linear unabhängig sind, dann sind auch $\varphi^{-1}(\mathfrak{x}_1), \ldots, \varphi^{-1}(\mathfrak{x}_r)$ linear unabhängig. Damit gilt nach Aussage 2.12 $r \leq n$.

Aus diesen beiden Aussagen folgt die dritte. (Oder man benutzt Satz 2.1.) □

Definition Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente einer Basis (jeder Basis) die *Dimension* von V. Bezeichnung: $\mathrm{Dim}(V)$ oder $\mathrm{Dim}_K(V)$.

Wenn V nicht endlich erzeugt ist, sagt man auch, dass V *unendliche Dimension* hat, und man schreibt $\mathrm{Dim}(V) = \infty$.

Beispiel 2.41 Der Raum K^n hat natürlich die Dimension n; man spricht auch vom *n-dimensionalen Standardvektorraum über K.*

Beispiel 2.42 Sei wie immer K ein Körper, und sei $p(X) \in K[X]$ mit $\mathrm{Grad}(p(X)) = d$. Dann ist K mittels der Inklusion $K \hookrightarrow K[X]/(p(X))$, $c \mapsto [c]_{(p(X))}$ ein Unterring von $K[X]/(p(X))$, und somit ist $K[X]/(p(X))$ in natürlicher Weise ein K-Vektorraum. Lemma 1.74 besagt, dass $1, [X], [X]^2, \ldots, [X]^{d-1}$ eine Basis dieses Vektorraums ist. Also ist dieser Vektorraum d-dimensional.

Beispielsweise ist der Körper $\mathbb{C} := \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und $1, i = [X]_{(X^2+1)}$ ist eine Basis dieses Vektorraums. Damit ist $\mathbb{C}$ ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Aus Lemma 2.38 folgt:

Lemma 2.43 *Seien V und W K-Vektorräume, wobei V endlich erzeugt ist, und sei $\varphi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

a) $\mathrm{Bild}(\varphi)$ *ist auch endlich erzeugt, und es ist* $\mathrm{Dim}(\mathrm{Bild}(\varphi)) \leq \mathrm{Dim}(V)$. *Wenn φ darüber hinaus surjektiv ist, ist auch W endlich erzeugt, und es ist* $\mathrm{Dim}(W) \leq \mathrm{Dim}(V)$.

b) Wenn φ injektiv ist, gilt $\mathrm{Dim}(\mathrm{Bild}(V)) = \mathrm{Dim}(V)$. *Wenn φ ein Isomorphismus ist, gilt* $\mathrm{Dim}(V) = \mathrm{Dim}(W)$.

Satz 2.4 *Seien V, W zwei endlich erzeugte K-Vektorräume. Dann gilt: Es gibt genau dann einen Isomorphismus zwischen V und W, wenn* $\mathrm{Dim}(V) = \mathrm{Dim}(W)$.

Beweis. Wir wissen schon, dass $\mathrm{Dim}(V) = \mathrm{Dim}(W)$, wenn φ ein Isomorphismus ist.

Sei also $\mathrm{Dim}(V) = \mathrm{Dim}(W) =: n$. Sei $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ eine Basis von V, und sei $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ eine Basis von W. Dann haben wir eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ mit $\varphi(\mathfrak{x}_i) = \mathfrak{y}_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, und wir haben eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\psi : W \longrightarrow V$ mit $\psi(\mathfrak{y}_i) = \mathfrak{x}_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Nun ist $\psi \circ \varphi : V \longrightarrow V$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $(\psi \circ \varphi)(\mathfrak{x}_i) = \mathfrak{x}_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, also $(\psi \circ \varphi) = \mathrm{id}_V$. Andererseits ist $\varphi \circ \psi : W \longrightarrow W$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $(\varphi \circ \psi)(\mathfrak{y}_i) = \mathfrak{y}_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, also $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$.

Damit ist also $\varphi : V \longrightarrow W$ ein Isomorphismus. □

Aussage 2.44 *Sei V endlich erzeugt. Dann kann man jedes linear unabhängige System in V zu einer Basis von V ergänzen. D.h.: Seien $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ linear unabhängige Vektoren in V. Dann kann man $\mathfrak{x}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{x}_s \in V$ finden, so dass $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s$ eine Basis von V bilden.*

Beweisskizze. Man geht wie folgt vor: Wenn das System eine Basis ist, ist man fertig. Wenn dies nicht der Fall ist, gibt es einen von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ linear unabhängigen Vektor. Man fügt so einem Vektor zu dem System hinzu. Dies iteriert man. Der Prozess terminiert nach genau $\mathrm{Dim}(V) - r$ Schritten. □

Aussage 2.45 *Sei V endlich erzeugt, und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann hat ist auch U endlich erzeugt, hat also auch eine Basis.*

Beweis. Angefangen von leeren System geht man analog zum obigen Beweis vor: Wenn immer es einen von dem System linear unabhängigen Vektor in U gibt, ergänzt man das System mit so einem Vektor. Dieser Prozess muss terminieren, da jedes linear unabhängige System in V höchstens $\mathrm{Dim}(V)$ Vektoren entält. Dann hat man ein maximales linear unabhängiges System von U, also eine Basis von U. □

Definition Sei A eine Matrix über K. Die Dimension des von den Spalten von A erzeugten Vektorraums heißt der *Spaltenrang* von A. Die Dimension des von den Zeilen von A erzeugten Vektorraums heißt der *Zeilenrang* von A.

Bemerkung Der Zeilenrang von A ist gleich dem Spaltenrang von A^t (und umgekehrt).

Ziel ist nun der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 2.5 *Sei A eine Matrix über K. Dann ist der Spaltenrang von A gleich dem Zeilenrang von A.*

Lemma 2.46 *Sei $A \in K^{m\times n}$ eine beliebige Matrix, und seien $M \in K^{m\times m}$ und $N \in K^{n\times n}$ invertierbare Matrizen. Dann ist der Spaltenrang von A gleich dem Spaltenrang von MAN, und der Zeilenrang von A ist gleich dem Zeilenrang von MAN.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Aussage für den Spaltenrang. Der Spaltenrang von A (resp. MAN) ist per Definition gleich der Dimension von $\mathrm{Bild}(\Lambda_A)$ (resp. $\mathrm{Bild}(\Lambda_{MAN})$). Nun ist $\mathrm{Bild}(\Lambda_{MAN}) = \mathrm{Bild}(\Lambda_M \circ \Lambda_A \circ \Lambda_N) = \mathrm{Bild}(\Lambda_M \circ \Lambda_A)$, da Λ_N surjektiv (sogar bijektiv) ist. Außerdem ist

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Bild}(\Lambda_M \circ \Lambda_A)) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Bild}(\Lambda_A)) \,,$$

da $\Lambda_M|_{\mathrm{Bild}(\Lambda_A)}$ injektiv (sogar bijektiv) ist (siehe Lemma 2.43).

Die Aussage über den Zeilenrang folgt, indem man zu den transponierten Matrizen übergeht und die schon bewiesenen Aussagen über den Spaltenrang anwendet. Genauer ist der Zeilenrang von A gleich dem Spaltenrang von A^t gleich dem Spaltenrang von $N^tA^tM^t = (MAN)^t$, gleich dem Zeilenrang von MAN. □

Lemma 2.47 *Sei $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform, und sei r die Anzahl der Nicht-Nullzeilen. Dann gilt: Der Zeilenrang von $\tilde{A}$ ist gleich dem Spaltenrang von $\tilde{A}$ ist gleich r.*

Beweis. Die Nicht-Nullzeilen sind offensichtlich linear unabhängig, d.h. sie bilden eine Basis für die von ihnen aufgespannten Raum.

Andererseits sind die Stufenspalten auch offensichtlich linear unabhängig, und die anderen Spalten sind von diesen Spalten linear abhängig. Damit bilden die Stufenspalten auch eine Basis in dem von ihnen aufgespannten Raum.

Beachten Sie, dass die Anzahl der Stufenspalten gleich der Anzahl der Nicht-Nullzeilen ist. □

Aus diesen beiden Lemmata folgt der Satz. Denn: Sei $M \in K^{m\times n}$ invertierbar so dass MA in Zeilenstufenform ist. Dann ist der Spaltenrang von A gleich dem Spaltenrang von MA gleich dem Zeilenrang von MA gleich dem Zeilenrang von A. □

Definition Da der Zeilenrang immer gleich dem Spaltenrang ist, spricht man einfach vom *Rang* von A. Bezeichnung: $\mathrm{Rang}(A)$.

Faktorräume und Dimensionsformeln

Sei V ein K-Vektorraum, und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist U insbesondere eine Untergruppe von V, und wir haben die Faktorgruppe V/U mit der induzierten Addition (also $[\mathfrak{x}]_U + [\mathfrak{y}]_U] = [\mathfrak{x} + \mathfrak{y}]_U$ für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$).

Ich behaupte, dass die Skalarmultiplikatition eine Skalarmultiplikation

$$\cdot : K \times V/U \longrightarrow V/U \ (a, [\mathfrak{x}]_U) \longrightarrow [a\mathfrak{x}]_U$$

induziert, und dass V/U mit dieser Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum ist.

Wir müssen überprüfen, dass die Multiplikation auf V/U wohldefiniert ist.

Seien dazu $a \in K$ und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$ mit $[\mathfrak{x}]_U = [\mathfrak{y}]_U$, d.h. $\mathfrak{x} \sim_U \mathfrak{y}$. Dann ist $a\mathfrak{x} - a\mathfrak{y} = a(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) \in U$, also $a\mathfrak{x} \sim_U a\mathfrak{y}$, was zu zeigen war.

Es ist leicht, die Vektorraumaxiome zu überprüfen.

Aussage 2.48 *Sei V endlich erzeugt und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann gilt* $\mathrm{Dim}(V) = \mathrm{Dim}(V/U) + \mathrm{Dim}(U)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ eine Basis von U. Wir ergänzen diese Basis zu einer Basis $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s$ von V (siehe Aussage 2.44). Ich behaupte nun, dass $[\mathfrak{x}_{r+1}]_U, \ldots, [\mathfrak{x}_s]_U$ eine Basis von V/U ist. (Dann ist $s = \mathrm{Dim}(V)$, $r = \mathrm{Dim}(U)$ und $s - r = \mathrm{Dim}(V/U)$, und hieraus folgt die Behauptung.)

Offensichtlich bilden $[\mathfrak{x}_1]_U, \ldots, [\mathfrak{x}_s]_U$ ein Erzeugendensystem von V/U. Da aber $[\mathfrak{x}_1]_U = \cdots = [\mathfrak{x}_r]_U = \mathfrak{o}_U$ ist, bilden auch $[\mathfrak{x}_{r+1}]_U, \ldots, [\mathfrak{x}_s]_U$ ein Erzeugendensystem.

Wir zeigen nun die lineare Unabhängigkeit. Seien dazu $a_{r+1}, \ldots, a_s \in K$ mit $a_{r+1}[\mathfrak{x}_{r+1}]_U + \cdots + a_s[\mathfrak{x}_s]_U = \mathfrak{o}$. Dann ist also $a_{r+1}\mathfrak{x}_{r+1} + \cdots + a_s\mathfrak{x}_s \in U$, d.h. es gibt $a_1, \ldots, a_r \in K$ mit $a_{r+1}\mathfrak{x}_{r+1} + \cdots + a_s\mathfrak{x}_s = a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{x}_r$, d.h. $-a_1\mathfrak{x}_1 - \cdots - a_r\mathfrak{x}_r + a_{r+1}\mathfrak{x}_{r+1} + \cdots + a_s\mathfrak{x}_s = \mathfrak{o}$. Da $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s$ eine Basis von V bilden, folgt $a_1 = \cdots = a_s = 0$. □

Sei nun auch W ein K-Vektorraum und $\varphi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann induziert φ einen Isomorphismus von Vektorräumen

$$\overline{\varphi} : V/\operatorname{Kern}(\varphi) \tilde{\longrightarrow} \operatorname{Bild}(\varphi) \ , [\mathfrak{x}]_{\operatorname{Kern}(\varphi)} \mapsto \varphi(\mathfrak{x}) \ . \tag{2.14}$$

Um zu überprüfen, dass die Abbildung wohldefiniert und injektiv ist, nehmen wir uns zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$ vor. Dann gilt:

$$\mathfrak{x} \sim_{\operatorname{Kern}(\varphi)} \mathfrak{y} \longleftrightarrow \mathfrak{x} - \mathfrak{y} \in \operatorname{Kern}(\varphi) \longleftrightarrow \varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = \mathfrak{o} \longleftrightarrow \varphi(\mathfrak{x}) = \varphi(\mathfrak{y}) \ ,$$

was zu zeigen war.

Es ist leicht zu sehen, dass φ eine lineare Abbildung ist, also ist es ein Isomorphismus.

Satz 2.6 *Sei V endlich erzeugt, und sei $\varphi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt* $\mathrm{Dim}(V) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Bild}(\varphi))$.

Dies folgt aus Aussage 2.48 und dem Isomorphismus (2.14).

Korollar 2.49 *Sei $A \in K^{m\times n}$. Dann gilt* $\mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(A)) = n$.

Definition Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Dann definieren wir die *Summe* von U_1 und U_2 als

$$U_1 + U_2 := \{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 \mid \mathfrak{x}_1 \in U_1\,, \mathfrak{x}_2 \in U_2\}\ .$$

Dies ist der kleinste Untervektorraum von V, der U enthält (überprüfen!).

Bemerkung Wenn $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ ein Erzeugendensystem von U_1 bilden und $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s$ ein Erzeugendensystem von U_2 bilden, dann bilden $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$, $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_s$ ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$.

Satz 2.7 *Sei V endlich erzeugt, und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Dann gilt* $\mathrm{Dim}(U_1 + U_2) + \mathrm{Dim}(U_1 \cap U_2) = \mathrm{Dim}(U_1) + \mathrm{Dim}(U_2)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$. Wir ergänzen diese Basis zu einer Basis $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s$ von U_1 sowie zu einer Basis $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t$ von U_2.

Ich behaupte, dass dann $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t$ eine Basis von $U_1 + U_2$ ist. (Dann ist $s+t = \mathrm{Dim}(U_1+U_2)$, $s = \mathrm{Dim}(U_1)$ und $t = \mathrm{Dim}(U_2) - \mathrm{Dim}(U_1 \cap U_2)$, und hieraus folgt die Behauptung.)

Es ist offensichtlich, dass es sich um ein Erzeugendensystem handelt.

Seien also $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t \in K$ mit $a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_s\mathfrak{x}_s + b_1\mathfrak{y}_1 + \cdots + b_t\mathfrak{y}_t = \mathfrak{o}$. Dann ist also $a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_s\mathfrak{x}_s = -(b_1\mathfrak{y}_1 + \cdots + b_t\mathfrak{y}_t) \in U_1 \cap U_2$. Somit gibt es $c_1, \ldots, c_r \in K$ mit $c_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + c_r\mathfrak{x}_r = a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_s\mathfrak{x}_s$ bzw. $(a_1 - c_1)\mathfrak{x}_1 + \cdots + (a_r - c_r)\mathfrak{x}_r + a_{r+1}\mathfrak{x}_{r+1} + \cdots + a_s\mathfrak{x}_s = \mathfrak{o}$. Hieraus folgt aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s$: $c_1 = a_1, \ldots, c_r = a_r$ und $a_{r+1} = \cdots = a_s = 0$. Wir haben also $a_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_r\mathfrak{x}_r + b_1\mathfrak{y}_1 + \cdots + b_t\mathfrak{y}_t = \mathfrak{o}$. Hieraus folgt nun $a_1 = \cdots = a_r = b_1 = \cdots = b_t = 0$ aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t$. □

Abbildungsmatrizen und Basiswechsel

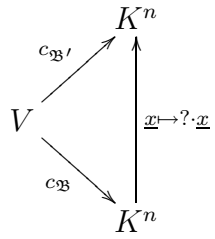
Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, und sei $\mathfrak{B} := (\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)$ eine Basis von V.

Wir haben den Isomorphismus $c_{\mathfrak{B}} : V \longrightarrow K^n$, der eindeutig durch $\mathfrak{b}_i \mapsto \underline{e_i}$ gegeben ist. Dieser Isomorphismus heißt die *Koordinatenabbildung* zu $\mathfrak{B}$. Für $\mathfrak{x} \in V$, heißt der Vektor $\underline{x} := c_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x})$ der *Koordinatenvektor* von $\mathfrak{x}$ bezüglich $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$.

Wir wählen nun eine zweite Basis $\mathfrak{B}' = (\mathfrak{b}'_1, \ldots, \mathfrak{b}'_n)$ von V. Dann können wir $\mathfrak{b}'_j = \sum_{i=1}^n s_{i,j}\mathfrak{b}_i$ mit eindeutig bestimmten $s_{i,j}$ schreiben. Die Matrix $S = ((s_{i,j}))_{i,j}$ nennen wir *Übergangsmatrix* von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{B}'$.

Beachten Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} s_{1,j} \\ \vdots \\ s_{n,j} \end{pmatrix}$ (die j-te Spalte von S) genau der Koordinatenvektor von $\mathfrak{b}'_j$ bez. $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ ist.

Wir wollen nun die Koordinatenvektoren von Vektoren von V bez. $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ in Koordinatenvektoren bez. $\mathfrak{b}'_1, \ldots, \mathfrak{b}'_n$ umrechnen. D.h. gegeben $\underline{x} \in K^n$ wollen wir $c_{\mathfrak{B}'} \circ c_{\mathfrak{B}}^{-1}(\underline{x})$ berechnen. Beachten Sie, dass $c_{\mathfrak{B}'} \circ c_{\mathfrak{B}}^{-1} : K^n \longrightarrow K^n$ eine lineare Abbildung ist.



Wie muss die Matrix ? lauten, damit das Diagramm kommutativ ist?

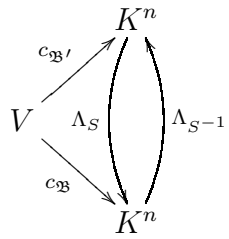
Bevor wir hierzu kommen, betrachten wir ein einfacheres Problem: Wir rechnen die Koordinatenvektoren von $\mathfrak{x} \in V$ bez. $\mathfrak{b}'_1, \ldots, \mathfrak{b}'_n$ in Koordinatenvektoren bez. $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ um.

Dies bedeutet: Wir bestimmen die Matrix zur linearen Abbildung $c_{\mathfrak{B}} \circ c_{\mathfrak{B}'}^{-1} : K^n \longrightarrow K^n$. Wir wissen, dass $c_{\mathfrak{B}} \circ c_{\mathfrak{B}'}^{-1}(\underline{e_j}) = c_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{b}'_j) = \begin{pmatrix} s_{1,j} \\ \vdots \\ s_{m,j} \end{pmatrix}$. Und das bedeutet: Die gesuchte Matrix ist S.

Mit anderen Worten: Wenn $\underline{x}$ der Koordinatenvektor von $\mathfrak{x}$ bez. $\mathfrak{b}'_1, \ldots, \mathfrak{b}'_n$ ist, dann ist $S\underline{x}$ der Koordinatenvektor von $\mathfrak{x}$ bez. $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$.

Nun können wir auch die ursprüngliche Frage beantworten: Die Abbildung $c_{\mathfrak{B}'} \circ c_{\mathfrak{B}}^{-1} : K^n \longrightarrow K^n$ ist durch $\underline{x} \mapsto S^{-1}\underline{x}$ gegeben. Also: Wenn $\underline{x}$ der

Koordinatenvektor von $\mathfrak{x}$ bez. $\mathfrak{B}$ ist, dann ist $S^{-1}\underline{x}$ der Koordinatenvektor von $\mathfrak{x}$ bez. $\mathfrak{B}'$.



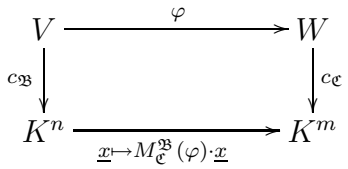
Sei nun W ein zweiter endlich erzeugter K-Vektorraum, sei $\mathfrak{C} := (\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_m)$ eine Basis von W, und sei $\varphi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.

Wir wissen bereits, dass φ durch $\varphi(\mathfrak{b}_1), \ldots \varphi(\mathfrak{b}_n)$ eindeutig bestimmt ist. Wir definieren die *Abbildungsmatrix* von φ bezüglich der Basen $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ und $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_m$ wie folgt:

Die j-te Spalte der Abbildungsmatrix ist der Koordinatenvektor von $\varphi(\mathfrak{b}_j)$ bezüglich der Basis $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_m$.

Somit ist die Abbildungsmatrix also eine $m \times n$-Matrix. Die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Basen $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ und $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_m$ bezeichnen wir mit $M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}}(\varphi)$.

Wir haben das kommutative Diagramm:



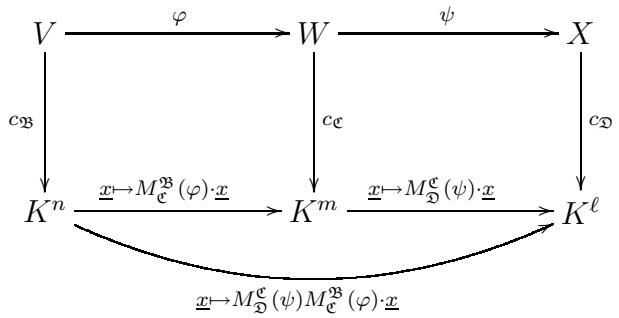
Die Abbildungsmatrix $M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}}(\varphi)$ ist endeutig durch die Forderung, dass das Diagramm komutativ sei, bestimmt.

Beachten Sie: Mit den obigen Notationen ist die Abbildungsmatrix von id_V bezüglich $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}$ gleich S, der Übergangsmatrix von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}'$ (und die Abbildungsmatrix von id_V bezüglich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ ist gleich S^{-1}).

$$M^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_V) = S \qquad M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}'}(\mathrm{id}_V) = S^{-1} \tag{2.15}$$

Sei nun X noch ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit Basis $\mathfrak{D} := (\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_\ell)$, und sei $\psi : W \longrightarrow X$ eine lineare Abbildung. Dann haben sind das rechte und das linke "Kästchen" sowie der untere Teil des folgenden

Diagramms kommutativ:



Dies bedeutet, dass das gesamte Diagramm kommutativ ist. Insbesondere sieht man, dass die Abbildungsmatrix von $\psi \circ \varphi : V \longrightarrow X$ bez. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gleich $M^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{D}}(\psi)M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}}(\varphi)$ ist. Also

$$M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{D}}(\psi \circ \varphi) = M^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{D}}(\psi)M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}}(\varphi) \; . \tag{2.16}$$

Eselsbrücke: Man kann "$\mathfrak{C}$ kürzen".

Wir betrachten nun, wie sich Abbildungsmatrizen unter Basiswechsel verändern.

Seien dazu $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ Basen von V und $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ Basen von W. Sei S die Übergangsmatrix von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}'$ und T die Übergangsmatrix von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{C}'$. Dann ist nach (2.16) und (2.15)

$$M^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{C}'}(\varphi) = M^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{C}'}(\mathrm{id}_W)M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}}(\varphi)M^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_V) = T^{-1}M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}}(\varphi)S \; . \tag{2.17}$$

Wir betrachten noch zwei Spezialfalle:

Sei $\varphi : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Die Abbildungsmatrix $M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ heißt dann die *Abbildungsmatrix von φ bezüglich* der Basis $\mathfrak{B}$. Wenn nun $\mathfrak{B}'$ eine weitere Basis ist und S (wie oben) die Übergangsmatrix von $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{B}'$ ist, dann ist

$$M^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{B}'}(\varphi) = S^{-1}M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}}(\varphi)S \; . \tag{2.18}$$

Wir geben uns eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ vor und betrachten die Abbildung $\Lambda_A : K^n \longrightarrow K^m$. Die Abbildungsmatrix dieser Abbildung bez. den Standardbasen von K^n und K^m ist natürlich A.

Seien nun $\mathfrak{B} := (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ und $\mathfrak{C} := (\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_m)$ Basen von K^n bzw. K^m, und seien B und C die Matrizen, die man erhält, wenn man die Basisvektoren jeweils als Spalten einer Matrix auffasst. Die Übergangsmatrix von der Standardbasis von K^n zur Basis $\mathfrak{B}$ ist demnach B, und die Übergangsmatrix von der Standardbasis von K^m zur Basis $\mathfrak{C}$ ist C. Demnach ist die Abbildungsmatrix von Λ_A bez. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gleich $C^{-1}AB$. (Überlegen Sie sich anhand der Definition der Abbildungsmatrix, warum dies richtig ist!)

Charakteristik und endliche Körper

Sei K ein Körper. Dann haben wir den Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow K\,, z \mapsto z \cdot 1_K$. Wir wissen, dass es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathrm{Kern}(\varphi) = (n) = \{an, \,|\, a \in \mathbb{Z}\}$ gibt. Beachten Sie: Entweder ist $n = 0$ oder n ist die kleinste Zahl in $\mathbb{N}$ mit $n \cdot 1_K = 0$.

Sei nun $n > 0$. Dann ist n eine Primzahl. Denn: Angenommen n ist keine Primzahl. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{N}$, beide $< n$, so dass $ab = n$. Damit ist dann $a \cdot 1_K \neq 0$ und $b \cdot 1_K \neq 0$ aber $ab1_K = (a1_K) \cdot (b1_K) = 0_K$, ein Widerspruch.

Definition Die Zahl n heißt die *Charakteristik* von K und wird mit $\mathrm{char}(K)$ bezeichnet.

Wenn $\mathrm{char}(K) = 0$, haben wir eine Inklusion $\mathbb{Z} \longrightarrow K\ , z \mapsto z \cdot 1_K$. Man erhält dann auch eine Inklusion $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$ von Körpern (warum?). Man "identifiziert" nun $\mathbb{Q}$ mit seinem Bild in K (in Verallgemeinerung des Falls $K = \mathbb{R}$). Dann ist $\mathbb{Q}$ (bez. der Inklusion) der kleinste Unterkörper von K.

Sei nun $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Wir haben einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow K$ von Körpern. Das Bild von $\mathbb{F}_p$ ist ein Unterkörper von K; dieser Körper ist nun (bez. der Inklusion) der kleinste Unterkörper von K. Nach Beispiel 2.26 ist K insbesondere ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum.

Sei nun K ein endlicher Körper. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot 1_K = 0$, also gilt $\mathrm{char}(K) > 0$. Sei wiederum $p := \mathrm{char}(K)$. Da K nur endliche viele Elemente enthält, ist K insbesondere endlich erzeugt als $\mathbb{F}_p$-Vekorraum. Sei $a_1, \ldots, a_d \in K$ eine Basis von K über $\mathbb{F}_p$. Dann ist K als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum isomorph zu K^d. Insbesondere gilt $\#K = p^d$.

Wir haben gezeigt:

Aussage 2.50 *Die Anzahl der Elemente eines endlichen Körpers ist immer eine Primpotenz (d.h. eine Potenz einer Primzahl).*

Wie schon in Abschnitt 1.10, S. 61 erwähnt kann man auch zeigen: Zu jeder Primpotenz q gibt es einen endlichen Körper mit q Elementen, und zwei endliche Körper mit q Elementen sind isomorph.

2.7 Determinanten

Zur Motivation der Definition der Determinante nehmen wir uns die folgende Aufgabe vor:

Gegeben $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n \in \mathbb{R}^n$ wollen wir definieren, was das *Volumen* des Spats

$$\{c_1\underline{x}_1 + \cdots + c_n\underline{x}_n \,|\, 0 \leq c_j \leq 1 \text{ für alle } j = 1, \ldots, n\}$$

ist. Mit anderen Worten: Wir suchen eine Abbildung $\mathrm{Vol} : (\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n \in \mathbb{R}^n$ $\mathrm{Vol}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \in \mathbb{R}$ unserer intuitiven Vorstellung des Volumen des entsprechenden physikalischen Spats entsricht.

Wir stellen die folgenden naheliegenden Forderungen (wobei $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ beliebige Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ sind, $c \in \mathbb{R}$ und $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i \neq j$ ist).

Vol1 $\mathrm{Vol}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{j-1}, c\underline{x}_j, \underline{x}_{j+1}, \ldots, \underline{x}_n) = |c| \cdot \mathrm{Vol}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_j, \underline{x}_{j+1}, \ldots, \underline{x}_n)$

Vol2 $\mathrm{Vol}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{j-1}, \underline{x}_j + \underline{x}_i, \underline{x}_{j+1}, \ldots, \underline{x}_n) = \mathrm{Vol}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$

Vol3 $\mathrm{Vol}(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n) = 1$

Man kann zeigen, dass es genau eine solche Abbildung $\mathrm{Vol} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt.

Eine andere Motivation der Determinante kann man über beliebigen Körpern formulieren: Wir suchen eine Abbildung, die jeder Matriz ein Skalar zuordnet, so dass die Matriz genau dann invertierbar ist, wenn dieses Skalar $\neq 0$ ist. Außerdem soll die Abbildung noch einige weitere "angenehme Eigenschaften" bez. elementaren Spaltentransformationen haben.

Sei also K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir suchen eine Abbildung $\mathrm{Det} : K^{n\times n} \longrightarrow K$, die die folgenden Eigenschaften hat:

Det1 Sei $A \in K^{n\times n}$, und sei A' eine Matrix, die aus A durch Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar c hervorgeht. Dann gilt $d(A') = c\,\mathrm{Det}(A)$.

Det2 Sei $A \in K^{n\times n}$, und sei A' die Matrix, die aus A durch Addition des c-fachen von Spalte i zu Spalte j (mit $i \neq j$) hervorgeht. Dann gilt $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A')$.

Det3 $\mathrm{Det}(I_n) = 1$.

(Beachten Sie, dass aber für $c = 0$ die Transformation in Det1 keine elementare Spaltentransformation ist.)

So eine Abbildung $K^{n\times n} \longrightarrow K$ heißt eine *Determinanteabbildung*. Wir werden sogleich sehen, dass es genau eine Determinantenabbildung $K^{n\times n} \longrightarrow K$ gibt. Wir werden auch sehen, dass diese Determinantenabbildung die Eigenschaft hat, dass $\mathrm{Det}(A) = 0$ genau dann wenn $\mathrm{Rang}(A) < n$, was die ursprüngliche Motivation war.

Notation Wenn eine Abbildung $f : K^{m\times n} \longrightarrow K$ gegeben ist, erhält man mittels $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \mapsto f(\underline{x}_1|\cdots|\underline{x}_n)$ eine Abbildung $(K^m)^n \longrightarrow K$. Wir bezeichnen diese Abbildung wieder mit f, d.h. wir setzen $f(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) := f(\underline{x}_1|\ldots|\underline{x}_n)$. Umgekehrt identifizieren wir Abbildungen $(K^m)^n \longrightarrow K$ mit Abbildungen $K^{m\times n} \longrightarrow K$.

Bemerkung Wenn wir eine Determinantenabbildung $\mathrm{Det} : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ haben, dann erfüllt die Abbildung $\mathrm{Vol} : (\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \mapsto |\det(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)|$ die obigen Forderungen Vol1, Vol2, Vol3. Die Zahl $\mathrm{Det}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ selbst kann man als *gerichtetes Volumen* auffassen.

Eindeutigkeit und Existenz einer Determinantenabbildung

Wir fixieren nun eine Determinantenabbildung $d : K^{n\times n} \longrightarrow K$ und leiten einige Eigenschaften her. Mittels dieser Eigenschaften werden wir dann insbesondere zeigen, dass es höchstens eine Determintenabbildung $K^{n\times n} \longrightarrow K$ gibt. Danach werden wir eine dieser Eigenschaften als Ansatz für eine Definition benutzen und zeigen, dass die so definierte Abbildung wirklich eine Determinatenabbildung ist.

Es ist leicht zu beschreiben, wie sich $d(A)$ (mit $A \in K^{n\times n}$) unter elementaren Spaltentransformationen angewandt auf A ändert. Wir kennen schon das Transformationsverhalten unter Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar $c \neq 0$. Außerdem haben wir:

Lemma 2.51 *Sei $A \in K^{n\times n}$ und sei A' eine Matrix, die aus A durch Anwendung einer elementaren Spaltentransformation hervorgeht. Dann gilt:*

a) Wenn A' aus A durch Vertauschen von zwei Spalten hervorgeht, gilt $d(A') = -d(A)$.

b) Wenn A' aus A durch Addition des c-fachen einer Spalte zu einer anderen Spalte hervorgeht, gilt $d(A') = d(A)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die zweite Aussage. Sei A' die Matrix, die man aus A durch Addition des c-fachen von Spalte i zu Spalte j erhält. Für $c = 0$ ist nichts zu zeigen, sei also $c \neq 0$. Wir haben

$$\begin{aligned} c\,d(A) &= d(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{i-1}, c\underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}, \ldots, \underline{a}_{j-1}) \\ &\overset{\text{Det1}}{=} d(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{i-1}, c\underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}, \ldots, \underline{a}_{j-1}, \underline{a}_j + c\underline{a}_i, \underline{a}_{j+1}, \underline{a}_n) \\ &= c\,d(A')\,, \end{aligned}$$

und hieraus folgt die Behauptung. (Wir haben hier implizit angenommen, dass $i < j$, aber das hat nur notationelle Gründe.)

Die erste Behauptung folgt, da das Vertauschen von zwei Spalten durch wiederholte Addition und Subtraktion einer Spalte, gefolgt mit Multiplikation einer Spalte mit -1, dargestellt werden kann (Mit anderen Worten: Man braucht Umformung (II) im Gauß-Algorithmus eigentlich gar nicht.)

In der Tat, die Vertauschung von Spalten i und j kann man so realisieren:
- Man addiert Spalte i zu Spalte j. (Dann steht in Spalte j $\underline{a}_i + \underline{a}_j$.)
- Man subtahiert Spalte j von Spalte i. (Dann steht in Spalte i $\underline{a}_i - (\underline{a}_i + \underline{a}_j) = -\underline{a}_j$.)
- Man addiert Spalte i zu Spalte j. (Dann steht in Spalte j $\underline{a}_i$.)
- Man multipliziert Spalte i mit -1. □

Bemerkung Zusammen mit der Eigenschaft $d(I_n) = 1$ folgt aus dem obigen Lemma insbesondere, dass $d(E)$ für eine Elementarmatrix E durch Axiome Det1, Det2, Det3 eindeutig festgelegt ist und dass immer $d(E) \neq 0$ gilt.

Wenn man beachtet, dass eine elementare Spaltentransformationen zur Multiplikation mit einer Elementarmatrix von rechts korrespondiert, erhält man aus dem obigen Lemma sofort:

Lemma 2.52 *Sei $A \in K^{n\times n}$ eine beliebige Matrix, und sei $E \in K^{n\times n}$ eine Elementarmatrix. Dann gilt $d(AE) = d(A) \cdot d(E)$.*

Per Induktion nach k folgt:

Lemma 2.53 *Sei $A \in K^{n\times n}$ beliebig, und seien $E_1, \ldots, E_k$ $n\times n$-Elementarmatrizen. Dann gilt $d(AE_1 \cdots E_k) = d(A) \cdot d(E_1) \cdots d(E_k)$.*

Aussage 2.54 *Es gibt höchstens eine Determinantenabbildung $d : K^n \longrightarrow K$, und diese erfüllt $d(A) = 0$ genau dann wenn* $\mathrm{Rang}(A) < n$.

Beweis. Sei nach wie vor $d : K^{n\times n} \longrightarrow K$ eine Determinantenabbildung, und sei $A \in K^{n\times n}$.

Sei zunächst $\mathrm{Rang}(A) = n$, also A invertierbar. Dann gibt es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ mit $A = E_1 \cdots E_k$ (siehe Satz 2.2). Dann gilt nach dem obigen Lemma $d(A) = d(E_1) \cdots d(E_k)$. Nun ist die Determinante einer Elementarmatrix eindeutig festgelegt (s.o.). Damit ist auch die Determinante von A eindeutig festgelegt.

Sei nun $\mathrm{Rang}(A) < n$. Dann gibt es also eine Matrix $\tilde{A}$, die eine Nullspalte enthält (z.B. eine Matrix in Spaltenstufenform) sowie Elementarmatrixen $E_1, \ldots, E_k$ so dass $A = \tilde{A}E_1 \cdots E_k$. Damit ist $d(A) = d(\tilde{A}) \cdot d(E_1) \cdots d(E_k) = 0$. □

Die Beweismethode hat einige recht einfache Konsequenzen:

Aussage 2.55 *Für $A \in K^{n\times n}$ gilt $d(A) = d(A^t)$.*

Beweis. Offensichtlich ist für eine Elementarmatrix E $d(E) = d(E^t)$. Wenn $\text{Rang}(A) = n$, gibt es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ mit $A = E_1 \cdots E_k$. Damit gilt $d(A^t) = d(E_k^t \cdots E_1^t) = d(E_k^t) \cdots d(E_1^t) = d(E_1) \cdots d(E_k) = d(A)$.

Wenn $\text{Rang}(A) < n$, ist auch $\text{Rang}(A^t) = \text{Rang}(A) < n$. Damit gilt $d(A^t) = 0 = d(A)$. □

Bemerkung Sei wiederum $A \in K^{n\times n}$. Aufgrund der obigen Aussage hat die Determinantenfunktion d die folgenden Eigenschaften bezüglich Transformation von A mittels elementarer Zeilenoperationen:

- Sei A' eine Matrix, die aus A durch Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar c hervorgeht. Dann gilt $d(A') = c\, d(A)$.
- Sei A' eine Matrix, die aus A durch Vertauschen von zwei Zeilen hervorgeht. Dann gilt $d(A') = -d(A)$.
- Sei A' die Matrix, die aus A durch Addition des c-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile hervorgeht. Dann gilt $d(A') = d(A)$.

Aussage 2.56 *Für $A, B \in K^{n\times n}$ gilt $d(AB) = d(A)\, d(B)$.*

Beweis. Sei zunächst $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B) = n$. Dann gibt es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ und $E_{k+1}, \ldots, E_\ell$ mit $A = E_1 \cdots E_k$ und $B = E_{k+1} \cdots E_\ell$. Damit ist $d(AB) = d(E_1 \cdots E_\ell) = d(E_1) \cdots d(E_\ell) = d(A)\, d(B)$.

Sei nun der Rang (mindestes) einer der beiden Matrizen $< n$. Wie das folgende Lemma zeigt, ist dann auch $\text{Rang}(AB) < n$. Damit gilt $d(AB) = 0 = d(A)\, d(B)$. □

Lemma 2.57 *Sei $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times r}$. Dann ist* $\text{Rang}(AB) \leq \min\{\text{Rang}(A), \text{Rang}(B)\}$.

Beweis. Wir benutzen die Definition des Rangs als Spaltenrang. Nach Definition der Matrizenmultiplikation sind alle Spalten von AB im "Spaltenraum von A" (d.h. im von den Spalten aufgespannten Raum) enthalten. Damit ist der Spaltenraum von AB im Spaltenraum von A enthalten. Dies impliziert $\text{Rang}(AB) \leq \text{Rang}(A)$.

Außerdem ist der Spaltenraum von AB gleich $\text{Bild}(\Lambda_{AB}) = \Lambda_{AB}(K^r) = \Lambda_A(\Lambda_B(K^r))$. Nach Lemma 2.43 a) ist die Dimension dieses Raumes $\leq \text{Dim}(\Lambda_B(K^r)) = \text{Rang}(B)$. □

Eine Aussage von Aussage 2.56 ist wiederum:

Aussage 2.58 *Die Determinantenabbildung d ist ein Homomorphismus von Monoiden von* $(K^{n\times n},\cdot)$ *nach* $(K,\cdot)$*. Insbesondere ist* $(K^{n\times n})^* \longrightarrow K^*$ *ein Homomorphismus von Gruppen.*

Beweis. Die erste Aussage ist eine Zusammenfassung der obigen Aussage und des Axioms Det3: $d(I_n) = 1$. Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten.□

Aussage 2.59 *Es gilt für alle* $j = 1,\ldots,n$ *und alle* $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{j-1},\underline{x}_{j+1},\ldots,\underline{x}_n \in K^n$*: Die Abbildung*

$$d : K^n \longrightarrow K\,,\underline{x} \mapsto d(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{j-1},\underline{x},\underline{x}_{j+1},\ldots,\underline{x}_n)$$

ist linear.

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass stets $d(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{j-1},\underline{x}+\underline{y},\underline{x}_{j+1},\ldots,\underline{x}_n) = d(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{j-1},\underline{x},\underline{x}_{j+1},\ldots,\underline{x}_n) + d(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{j-1},\underline{y},\underline{x}_{j+1},\ldots,\underline{x}_n)$ gilt.

Wir wissen, dass $n+1$ Vektoren in K^n immer linear abhängig sind. Wir haben also $c,d \in K$ und $c_1,\ldots,c_{j-1},c_{j+1},\ldots,c_n \in K$, nicht alle $= 0$, mit

$$c\underline{x} + d\underline{y} + \sum_{k\neq j} c_k\underline{x}_k = 0\ .$$

Wenn $c = d = 0$ ist, sind die Vektoren $\underline{x}_k$ $(k \neq j)$ linear abhängig. Damit haben alle drei Matrizen, die hier betrachtet werden, Rang $< n$. Somit gilt die Behauptung.

Sei also $c \neq 0$ oder $d \neq 0$. Wie können o.E. (ohne Einschränkung) annehmen, dass $d \neq 0$ und sogar $d = -1$. Dann ist also $\underline{y} = c\underline{x} + \sum_{k\neq j} c_k\underline{x}_k$, und wir haben nun

$$\begin{array}{l} d(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{j-1},\underline{y},\underline{x}_{j+1},\ldots,\underline{x}_n) = \\ d(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{j-1},c\underline{x}+\sum_{k\neq j} c_k\underline{x}_k,\underline{x}_{j+1},\ldots,\underline{x}_n) = \\ d(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{j-1},c\underline{x},\underline{x}_{j+1},\ldots,\underline{x}_n) = \\ c\cdot d(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{j-1},\underline{x},\underline{x}_{j+1},\ldots,\underline{x}_n)\ . \end{array}$$

Nach dem selben Argument ist

$$\begin{array}{l} d(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{j-1},\underline{x}+\underline{y},\underline{x}_{j+1},\ldots,\underline{x}_n) = \\ d(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{j-1},(1+c)\underline{x}+\sum_{k\neq j} c_k\underline{x}_k,\underline{x}_{j+1},\ldots,\underline{x}_n) = \\ (1+c)\cdot d(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{j-1},\underline{x},\underline{x}_{j+1},\ldots,\underline{x}_n)\ . \end{array}$$

Aus der Verbindung dieser beiden Identitäten folgt die Behauptung. □

Bemerkung Die Aussage in der obige Aussage heißt *Multilinearität* von d.

Sei nun $n \geq 2$.

Notation Sei für $A \in K^{n\times n}$ und $i,j = 1,\dots n$ $A_{i,j}$ diejenige $n-1\times n-1$-Matrix, die entsteht, wenn man in A die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht.

Betrachten wir die Abbildung $K^{(n-1)\times(n-1)} \longrightarrow K\,, A \mapsto d(\begin{pmatrix} 1 & \\ & A \end{pmatrix})$. Man sieht leicht, dass dies eine Determinantenabbildung auf $K^{(n-1)\times(n-1)}$ ist. Wir bezeichnen diese Abbildung mit d_{n-1}, und die wir setzen $d_n := d$.

Aussage 2.60 (Laplacescher Entwicklungssatz) *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt für alle $j = 1,\dots,n$:*

$$d_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\, d_{n-1}(A_{i,j}) \qquad \textit{(Entwicklung nach Spalte } j\textit{)}$$

Analog gilt für alle $i = 1,\dots,n$:

$$d_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}\, d_{n-1}(A_{i,j}) \qquad \textit{(Entwicklung nach Zeile } i\textit{)}$$

Beweis. Die beiden Aussagen sind äquivalent da $d_n(A) = d_n(A^t)$ und $d_{n-1}(A^t) = d_{n-1}(A^t)$. Wir zeigen die Entwicklung nach Spalte j.

Aufgrund der Multilinearität ist

$$\begin{aligned} d(A) = &\; d(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_{j-1},\textstyle\sum_{i=1}^n a_{i,j}\,\underline{e}_i,\underline{a}_{j+1},\dots,\underline{a}_n) \\ = &\; \textstyle\sum_{i=1}^n a_{i,j}\,(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_{j-1},\underline{e}_i,\underline{a}_{j+1},\dots,\underline{a}_n)\,. \end{aligned}$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$d_n(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_{j-1},\underline{e}_i,\underline{a}_{j+1},\dots,\underline{a}_n) = (-1)^{i+j} d_n(A_{i,j})\,.$$

Sei zunächst

$$A = (\underline{e}_1|a_2|\cdots|\underline{a}_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\,.$$

Dann ist $d_n(A) = d_n(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix})$ aufgrund von Spaltentransformationen, und letzteres ist per Definition gleich $d_{n-1}(A_{1,1})$. Somit ist die Formel für solche Matrizen richtig.

Sei nun $A = (\underline{e}_i|a_2|\cdots|\underline{a}_n)$ eine Matrix wie oben, nur das die Eins in in der i-ten Zeile steht. Wieder "räumen wir zunächst die Einträge rechts der 1 aus (Addition von Vielfachen der ersten Spalte zu anderen Spalten). Wir führen hintereinander die Zeilentransformationen "Vertauschen der Zeile i mit Zeile $i-1$, "Vertauschen der Zeile $i-1$ mit Zeile $i-2$", ..., "Vertauschen der Zeile 2 mit Zeile 1" durch und nennen das Ergebnis A'. Dann ist $A'_{1,1} = A_{i,1}$ und $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{i,1} \end{pmatrix}$. Damit ist $d_n(A) = (-1)^{i-1}\, d_n(A') = (-1)^{i+1}\, d_{n-1}(A_{i,1})$. Die Formel ist also wiederum richtig.

Sei nun $A = (\underline{a}_1|\cdots|\underline{a}_{j-1}|\underline{e}_i|\underline{a}_{j+1}|\cdots|\underline{a}_n)$. Wir gehen analog vor und "räumen zuerst die Einträge rechts und links vom Eintrag mit Index (i,j) aus". Dann vertauschen wir der Reihe nach die Spalte j mit der Spalte $j-1$, ..., die Spalte 2 mit der Spalte 1. Dann vertauschen wir noch die Zeilen wie oben. Wir erhalten die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{i,j} \end{pmatrix}$. Wir haben nun $d_n(A) = (-1)^{i-1+j-1}\, d_{n-1}(A_{i,j}) = (-1)^{i+j}\, d_{n-1}(A_{i,j})$, abermals die richtige Formel. □

Wir kommen nun zum Hauptresultat über Determinantenabbildungen.

Satz 2.8 *Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau eine Determinantenabbildung $K^{n\times n} \longrightarrow K$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit haben wir schon gezeigt.

Motiviert durch die obige Entwicklung nach Zeilen (die ja für jede Determinantenabbildung gelten muss) *definieren* wir rekursiv für jeden Körper K:

$$\mathrm{Det}_1(a) := a \qquad \mathrm{Det}_n(A) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{i,j}\, \mathrm{Det}_{n-1}(A_{i,j})$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$. Ich behaupte, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ Det_n eine Determinantenabbildung ist.

Wir zeigen dies nach Induktion über n. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial. Wir setzen also voraus, dass die Behauptung für n richtig ist und zeigen die Behauptung für $n+1$.

Beachten Sie, dass wir dann insbesondere alle oben bewiesenen Eigenschaften für Determinantenabbildungen für Det_n benutzen dürfen.

Offensichtlich ist $\mathrm{Det}_{n+1}(I_{n+1}) = 1 \cdot \mathrm{Det}(I_1) = 1$.

Sei $A \in K^{(n+1)\times(n+1)}$, $j = 1, \ldots, n+1$ und A' diejenige Matrix, die aus A durch Multiplikation der j-ten Spalte mit $c \in K$ hervorgeht. Dann ist $\mathrm{Det}_n(A'_{1,k}) = c\, \mathrm{Det}_n(A'_{1,k})$ für alle $k \neq j$. Damit gilt $\mathrm{Det}_{n+1}(A') = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, c\, a_{1,j}\, \mathrm{Det}_n(A_{i,j}) = \mathrm{Det}_{n+1}(A)$.

Sei nun $A \in K^{(n+1)\times(n+1)}$, und seien $i, j = 1, \ldots, n+1$ mit $i \neq j$. Sei A' diejenige Matrix, die aus A durch Addition der i-ten Spalte zur j-ten Spalte hervorgeht. Für $k \neq i, j$ entsteht dann $A'_{1,i}$ auch aus $A_{1,i}$, indem eine Spalte zu einer anderen addiert wird. Wenn wir nun anwenden, dass Det_n eine Determinantenabbildung ist, erhalten wir, dass $\mathrm{Det}(A'_{1,k}) = \mathrm{Det}(A_{1,k})$ für alle $k \neq i, j$. Außerdem ist dies offensichtlich auch für $k = j$ richtig, denn diese Spalte wird ja gerade gestrichen.

Wir untersuchen nun $\mathrm{Det}_n(A'_{1,i})$. Es ist $\mathrm{Det}_n(A'_{1,i}) = \mathrm{Det}_n(A_{1,i}) + \mathrm{Det}_n(B)$, wobei B aus A hervorgeht, indem man zuerst die Spalten i und j vertauscht und dann die Spalte i streicht. Also hat B bis auf Reihenfolge die selben Spalten wie die Matrix $A_{1,j}$. Genauer geht B aus $A_{j,1}$ durch $|j-i|-1$ Spaltenvertauschungen hervor. Damit ist also $\mathrm{Det}_n(A'_{1,i}) = \mathrm{Det}_n(A_{1,i}) + (-1)^{|j-i|-1}\,\mathrm{Det}_n(A_{1,j}) = \mathrm{Det}_n(A_{1,i}) + (-1)^{j-i+1}\,\mathrm{Det}_n(A_{1,j})$.

Es folgt:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Det}_{n+1}(A') - \mathrm{Det}_{n+1}(A) \\
= \;& (-1)^{1+i} a_{1,i}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A'_{1,i}) + (-1)^{1+j} a'_{1,j}\,\mathrm{Det}_n(A_{1,j}) \\
& -(-1)^{1+i} a_{1,i}\,\mathrm{Det}_n(A_{1,i}) - (-1)^{1+j} a_{1,j}\,\mathrm{Det}_n(A_{1,j}) \\
= \;& (-1)^{1+i} a_{1,i}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A_{1,i}) + (-1)^{1+i}(-1)^{j-i+1} a_{1,i}\,\mathrm{Det}_n(A_{1,j}) \\
& \quad +(-1)^{1+j} a_{1,j}\,\mathrm{Det}_n(A_{1,j}) + (-1)^{1+j} a_{1,i}\,\mathrm{Det}_n(A_{1,j}) \\
& -(-1)^{1+i} a_{1,i}\,\mathrm{Det}_n(A_{1,i}) - (-1)^{1+j} a_{1,j}\,\mathrm{Det}\,n(A_{1,j}) \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

□

Notation Im Folgenden schreiben wir Det statt Det_n. Eine andere übliche Schreibweise für $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & . & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ ist $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & . & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

Man kann die Spalten- / Zeilnentwicklungen der Determinante verwenden, um eine nicht-rekursive Formel herzuleiten. Es ergibt sich:

$\underline{n=2}$. Es ist $\mathrm{Det}(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,2}$.

$\underline{n=3}$. Es ist $\mathrm{Det}(A) = a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,2} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} =$
$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$.
Dies ist die so genannte *Regel von Sarrus*.

Ich gebe noch ohne Beweis das Ergebnis für beliebies n an.
Zunächst einige Definitionen und einfache Bemerkungen.

Definition / Bemerkung Wir ordnen jeder Permutation $\pi \in S_n$ die entsprechende *Permutationsmatrix* $M_\pi := (\underline{e}_{\pi(1)}, \ldots, \underline{e}_{\pi(n)}) \in K^{n\times n}$ zu. Man sieht leicht, dass diese Matrix immer invertierbar ist, und dass die Abbildung $S_n \longrightarrow K^{n\times n}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir betrachten nun Permutationsmatrizen über $\mathbb{Q}$ und definieren nun das *Signum* von $\pi \in S_n$ wie folgt: $\text{sign}(\pi) := \text{Det}(M_\pi) \in \mathbb{Q}^*$. Da auch $\text{Det} : (\mathbb{Q}^{n\times n})^* \longrightarrow \mathbb{Q}^*$ ein Gruppenhomomorphismus ist, ist also $\text{sign} : S_n \longrightarrow \mathbb{Q}^*$ ein Gruppenhomomorphismus.

Eine *Transposition* ist per Definition eine Permutation, die genau zwei Elemente vertauscht und die anderen Elemente fest lässt. Man sieht leicht, dass jede Permutation ein Produkt von Transpositionen ist (= aus Transpositionen durch Verknüpfung hervorgeht). (Beweisen Sie dies per Induktion!)

Wenn π eine Transposition ist, ist $\text{Det}(\pi) = -1$ per Definition. Damit gilt: Sei $\pi = \pi_1 \cdots \pi_k$, wobei die π_i Transpositionen sind. Dann ist $\text{sign}(\pi) = (-1)^k$. Insbesondere ist also $\text{sign}(\pi) = \pm 1$.

Man sieht auch: Wenn $\pi_1 \cdots \pi_k = \sigma_1 \cdots \sigma_\ell$ mit Transpositionen π_i und σ_i, dann sind entweder k und ℓ beide gerade oder beide sind ungerade.

Wir haben nun (ohne Beweis):

Aussage 2.61 (Formel von Leibniz) *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann ist*

$$\text{Det}(A) = \sum_{\pi\in S_n} \text{sign}(\pi) a_{1,\pi(1)} \cdots a_{n,\pi(n)} \ .$$

Bemerkung Diese Formel hat ihren Wert in theoretischen Betrachtungen. Für die algorithmische Berechnung der Determinante ist sie aber katastrophal: Mittels dieser Formel benötigt man $(n-1)\cdot n!$ Körpermultiplikationen. Mann man mit elementaren Spalten- und Zeilenumformungen rechnet, benötigt man nur $\mathcal{O}(n^3)$ Körperoperationen, genau wie beim Gauß-Algorithmus.

Die adjunkte Matrix und die Cramersche Regel

Definition Für $A \in K^{n\times n}$ definieren wir die *adjunkte Matrix* als

$$A^\# := ((-1)^{i+j} (\text{Det}(A_{j,i})))_{i,j=1,\ldots n} \ .$$

(Beachten Sie die Rolle der Indices!)

Sei nun $A \in K^{n\times n}$ und $\underline{b} \in K^n$, und sei $\underline{c} := A^{\#}\underline{b}$. Dann ist

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \operatorname{Det}(A_{j,i})\, b_j = \operatorname{Det}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{i-1}, \underline{b}, \underline{a}_{i+1}, \cdots, \underline{a}_n)\ . \qquad (2.19)$$

aufgrund der Formel für die Entwicklung nach Spalten. Also: Man erhält c_i, indem man *die i-te Spalte von A durch $\underline{b}$ ersetzt und die Determinante dieser Matrix bildet.* (Beachten Sie wieder die unkonventionelle Rolle des Index i!)

Somit ist insbesondere $A^{\#}\underline{a}_j = \operatorname{Det}(A)\,\underline{e}_j$. (Wenn man die i-te Spalte von A durch $\underline{a}_j$ ersetzt und dann die Determinante bildet, erhält man $\operatorname{Det}(A)\,\delta_{i,j}$.)

Damit gilt

$$A^{\#}A = \operatorname{Det}(A)\, I_n\ . \qquad (2.20)$$

Da A beliebig war, gilt auch $(A^t)^{\#}A^t = \operatorname{Det}(A^t)\, I_n = \operatorname{Det}(A)\, I_n$. Nun ist $(A^t)^{\#} = ((-1)^{i+j}\,(\operatorname{Det}(A_{i,j})))_{i,j=1,\ldots n} = (A^{\#})^t$.

Damit folgt:

$$(A\,A^{\#})^t = (A^{\#})^t A^t = (A^t)^{\#}A^t = \operatorname{Det}(A)\, I_n$$

Wenn man nochmal transponiert, erhält man

$$A\,A^{\#} = \operatorname{Det}(A)\, I_n\,.$$

Wenn A invertierbar ist, kann man dies natürlich auch durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\operatorname{Det}(A)} \cdot A^{\#}$$

ausdrücken.

Wir geben uns nun eine invertierbare Matrix $A \in K^{n\times n}$ und einen Vektor $\underline{b} \in K^n$ vor. Dann wissen wir, dass das LGS $A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{b}$ genau eine Lösung hat; sei diese $\underline{x}$. Wenn wir beide Seiten von (2.20) von rechts mit $\underline{x}$ multiplizieren erhalten wir $A^{\#}\,\underline{b} = \operatorname{Det}(A)\,\underline{x}$, also

$$\underline{x} = \frac{1}{\operatorname{Det}(A)} \cdot A^{\#}\,\underline{b}\,.$$

Wenn wir (2.19) beachten, erhalten wir:

$$x_i = \frac{\operatorname{Det}(\underline{a}_i, \cdots, \underline{a}_{i-1}, \underline{b}, \underline{a}_{i+1}, \cdots, \underline{a}_n)}{\operatorname{Det}(A)} \qquad (2.21)$$

Dies ist die so genannte *Cramersche Regel.*

Algorithmisch ist diese Formel aber kein Fortschritt gegenüber dem Gauß-Algorithmus.

Die Determinante eines Endomorphismus

Wir geben uns jetzt einen endlichen erzeugten K-Vektorraum V und einen Endomorphismus $\varphi : V \longrightarrow V$ vor. Wir wollen die *Determinante von* φ definieren.

Hierzu wählen wir uns (irgendwie) eine Basis $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ von V und betrachten die Determinante der Abbildungsmatrix $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(\varphi)$ von φ bez. $\mathfrak{B}$.

Ich behaupte, dass diese Determinante nicht von der Wahl der Basis abhängt.

Sei hierzu $\mathfrak{B}'$ eine andere Basis von V, und sei S die Übergangsmatrix von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{B}'$. Dann gilt nach (2.18) und Aussage 2.58:

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}(\varphi)) = \mathrm{Det}(S^{-1}\, M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(\varphi)\, S) = \\ \mathrm{Det}(S^{-1})\ \mathrm{Det}(M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(\varphi))\ \mathrm{Det}(S) = \mathrm{Det}(M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(\varphi))\end{aligned}$$

Damit können wir definieren: Die *Determinante* von φ ist die Determinante der Abbildungsmatrix von φ bezüglich irgendeiner Basis von V. Bezeichnung: $\mathrm{Det}(\varphi)$.

Langrange-Interpolation und die Vandermondesche Matrix

Ich schließe mit der expliziten Berechnung der Determinante einer bestimmten Art von Matrizen und einer Anwendung.

Sei wie immer K ein Körper, und seien $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in K^2$, wobei die x_i paarweise verschieden sind. Wir wollen diese Punkte mittels eines Polynoms *interpolieren*. Dies heißt, wir wollen ein Polynom $p(X) \in K[X]$ mit $p(x_i) = y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ finden. Wir stellen uns die Aufgabe, ein solches Polynom mit möglichst kleinem Grad zu finden.

Nun hat diese Aufgabe die folgende eindeutige Lösung: *Es gibt ein eindeutig bestimmtes Interpolationspolynom* $p(X) \in K[X]$ *mit* $\mathrm{Grad}(p(X)) \leq n-1$.

Das Auffinden dieses Polynoms heißt *Lagrange Interpolation*.

Dies wollen nun die Behauptung beweisen. Dabei werden wir auch eine Methode kennen lernen, die es erlaubt, dieses Polynom explizit zu berechnen.

Sei zunächst $p(X) = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ irgendein Polynom. Dann gilt: $p(x_i) = y_i \longleftrightarrow \sum_{i=0}^{d} a_i x_j^i = y_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_i & \cdots & x_i^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = y_n$. Mit anderen Worten: Das Polynom $p(X)$ interpoliert die Punkte genau dann, wenn

$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$ eine Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^d \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

ist, wobei $\begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_d \end{pmatrix}$ der Vektor der Unbestimmten ist.

Ich behaupte nun, dass die quadratische Matrix $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ invertierbar ist. Hieraus folgt die Behauptung, dass es ein eindeutig bestimmtes Interpolationspolynom vom Grad $\leq n-1$ gibt. Außerdem ergibt dies sofort eine Methode, dies zu berechnen: Man löse das LGS! (Es gibt aber noch andere Methoden hierfür.)

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ heißt *Vandermondesche Matrix*. Ich berechne nun die Determinante dieser Matrix und zeige, dass diese $\neq 0$ ist. Beachten Sie, dass wir vorausgesetzt haben, dass die x_i paarweise verschieden sind. Wenn zwei gleich sind, ist die Determinante offensichtlich $= 0$.

Wenn wir der Reihe nach das x_n-fache der Spalte $n-1$ von der Spalte n abziehen, das x_n-fache der Spalte $n-2$ von der Spalte n abziehen, ..., das x_n-fache der Spalte 2 von der Spalte 1 abziehen (in dieser Reihenfolge),

erhalten wir:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & x_1 - x_n & \cdots & x_1^{n-1} - x_n x_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_n x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{n+1} \cdot \mathrm{Det}\begin{pmatrix} x_1 - x_n & \cdots & x_1^{n-1} - x_n x_1^{n-2} \\ \vdots & . & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_n x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} =$$

$$(x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} .$$

Die Matrix, von der die Determinante genommen wird, ist nun eine $(n-1) \times (n-1)$-Vandermondesche Matrix.

Per Induktion nach n sieht man nun, dass

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) .$$

Insbesondere sieht man, dass die Determinante $\neq 0$ ist, also ist die Matrix invertierbar.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **3**
1.1 Vorbemerkungen 3
1.2 Mengen 7
1.3 Abbildungen 13
1.4 Relationen 18
1.5 Halbgruppen, Monoide und Gruppen 25
1.6 Ringe und Körper 33
1.7 Die ganzen und die rationalen Zahlen 37
1.8 Morphismen 39
1.9 Der Eukl. Algorithmus und Moduloarithmetik 46
1.10 Polynome 54

2 Lineare Algebra **65**
2.1 Lineare Gleichungssysteme und Unterräume 65
2.2 Der Gauß-Algorithmus 73
2.3 Lineare Abbildungen und Matrizen 87
2.4 Matrizenmultiplikation und Gauß-Algorithmus 91
2.5 Vektorräume 99
2.6 Endlich erzeugte Vektorräume 103
2.7 Determinanten 115