# Lineare Algebra für Informatiker

Universität Leipzig

WS 2008 / 09

Claus Diem

# Kapitel 1

# Grundlagen

## 1.1 Vorbemerkungen

Ziel dieses Abschnitts ist, einige logische Grundlagen zu klären und die sogenannte *Aussagenlogik* zu motivieren. Die Aussagenlogik selbst wird in der Vorlesung "Logik" von Herrn Prof. Brewka behandelt.

Wir beginnen mit einigen mathematischen Aussagen $A, B, C, \ldots$. Zum Beispiel könnten dies diese Aussagen sein:

- 2 *ist gerade.*
- *Jede durch 4 teilbare natürliche Zahl ist durch 2 teilbar.*
- *Jede durch 2 teilbare natürlich Zahl ist durch 4 teilbar.*
- *Für je drei ganze Zahlen* $x, y, z$ *mit* $x^3 + y^3 = z^3$ *gilt:* $x \cdot y \cdot z = 0$.
- *Für je drei ganze Zahlen* $x, y, z$ *und jede natürliche Zahl* $n \geq 3$ *mit* $x^n + y^n = z^n$ *gilt:* $x \cdot y \cdot z = 0$.
- *Jede gerade natürliche Zahl* $\geq 4$ *ist eine Summe von zwei Primzahlen.*

Jede dieser Aussagen ist entweder wahr oder falsch.

Wir können nun diese oder andere (wahre oder falsche) Aussagen verwenden, um komplexere Aussagen zu betrachten. Ein Beispiel ist

$$A \textit{ und } B\ ,$$

was man mit

$$A \wedge B$$

abkürzt. Es ist klar, dass das Wort *und* bedeutet, dass diese Aussage genau dann wahr ist, wenn beide Aussagen $A$ und $B$ wahr sind. Dies kann man mittels einer *Wahrheitstabelle* ausdrücken.

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $f$ |
| $f$ | $f$ | $f$ |

Eine oft benutzte Form ist auch

| $A \wedge B$ | $w$ | $f$ |
|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $f$ |
| $f$ | $f$ | $f$ |

.

Andere "Operatoren", die wir auf Aussagen anwenden können, sind *nicht*, *oder* und *entweder oder*, mit den folgenden offensichtlichen Wahrheitstabellen. (Das Wort *oder* wird in der Mathematik immer als *und/oder* benutzt.)

| $\neg A$ | $w$ | $f$ |
|---|---|---|
| | $f$ | $w$ |

| $A \vee B$ | $w$ | $f$ |
|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $w$ | $f$ |

| $A \dot{\vee} B$ | $w$ | $f$ |
|---|---|---|
| $w$ | $f$ | $w$ |
| $f$ | $w$ | $f$ |

**Implikationen**

Wir betrachten nun die Aussage $A$ *impliziert* $B$, abgekürzt $A \to B$. Wiederum wollen wir in Abhängigkeit davon, ob $A$ wahr oder falsch ist, diese Aussage als wahr oder falsch betrachten. Wir legen fest, dass $A \to B$ genau dann *falsch* ist, wenn $A$ wahr und $B$ falsch ist. Wir haben also die folgende Wahrheitstabelle:

| $A \to B$ | $w$ | $f$ |
|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $w$ |

Dies bedeutet also insbesondere, dass $A \to B$ automatisch wahr ist, wenn $A$ falsch ist. Wir können nun die fünfte Beispiel-Aussage oben wie folgt umformulieren:

*Für je drei ganze Zahlen $x, y, z$ und jede natürliche Zahl $n \geq 3$ gilt:*

$$x^n + y^n = z^n \longrightarrow x \cdot y \cdot z = 0$$

Die Aussage $A$ *impliziert* $B$ wird auch mit

*Wenn $A$ [gilt], dann [gilt] $B$*

umschrieben. Z.B.

*Für je drei ganze Zahlen $x, y, z$ und jede natürliche Zahl $n \geq 3$ gilt:*

$$\textit{Wenn } x^n + y^n = z^n, \textit{ dann gilt } x \cdot y \cdot z = 0 \; .$$

Ich möchte darauf hinweisen, dass die Bedeutung von *A impliziert B* bzw. *Wenn A, dann [gilt] B* nicht unbedingt dem allgemeinen Sprachgebrauch entspricht. Insbesondere könnte man geneigt sein, Aussagen der Form *A impliziert B* weder als wahr oder falsch sondern einfach als *unsinnig* zu betrachten, falls es keinen (offensichtlichen) engen Zusammenhang zwischen $A$ und $B$ gibt.

Mögliche Beispiele hierfür sind die folgenden beiden wahren Aussagen über ganze Zahlen:

$$3 > 4 \longrightarrow 100 < 0$$

$$3 = 2 + 1 \longrightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2$$

Ich erwähne noch den Operator *genau dann wenn*, der durch die folgende Wahrheitstabelle definiert ist.

| $A \leftrightarrow B$ | $w$ | $f$ |
|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $f$ |
| $f$ | $f$ | $w$ |

Die Aussage $A \longleftrightarrow B$ liest man auch so: *A ist äquivalent zu B*.

### Komplexere Zusammensetzungen

Die Operatoren *und*, *oder*, ... kann man selbstverständlich mehrfach anwenden. Man sollte Klammern setzen, um die Interpretation einer Aussage genau festzulegen.

Einige Bespiele:

Seien $A$, $B$, $C$ drei sinnvolle (d.h. wahre oder falsche) mathematische Aussagen. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- $\neg(A \wedge B)$
- $\neg A \vee \neg B$

genauso:

- $\neg(A \vee B)$
- $\neg A \wedge \neg B$

(Diese beiden Äquivalenzen sind unter dem Namen *De Morgan'sche Gesetze* bekannt.)

Es sind auch äquivalent:

- $A \to B$
- $\neg(A \wedge \neg B)$
- $\neg A \vee B$
- $\neg B \to \neg A$

sowie:

- $A \wedge (B \vee C)$
- $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

sowie:

- $A \vee (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

und:

- $(A \to B) \to C$
- $(A \wedge B) \to C$

Dies kann man z.B. leicht mittels Wahrheitstabellen einsehen.

**Beweisschemata**

Nehmen wir an, wir wollen beweisen dass $B$ wahr ist. Falls wir wissen, dass $A$ wahr ist und $A \to B$ wahr ist, folgt dass $B$ wahr ist. Dies kann man formal so beschreiben:

$$\begin{array}{l} A \\ A \to B \\ \hline B \end{array}$$

Dies ist ein Beispiel eines *direkten Beweises*.

Wir nehmen nun an, dass wir wissen, dass $A$ wahr ist und $\neg B \to \neg A$ gilt. In diesem Fall können wir auch schließen, dass $B$ wahr ist.

$$\begin{array}{l} A \\ \neg B \to \neg A \\ \hline B \end{array}$$

Dies ist ein Beispiel eines *Beweises durch Widerspruch*.

Noch einige Bemerkungen:

- Statt $A \wedge B$ schreibt man oft $A, B$.
- Statt des Implikationspfeils $\to$ wird oft ein Doppelpfeil $\Longrightarrow$ geschrieben.
- Ein Beweis der Form *Es gilt $A$, und es gilt $A \to B$, folglich gilt also auch $B$.* wird oft (insbesondere in Vorlesungen) in der Form *Es gilt $A$.* $\Longrightarrow B$ abgekürzt.
- Die Aussagen $A \leftrightarrow B$ und $B \leftrightarrow C$ (und folglich auch $A \leftrightarrow C$) werden oft zu $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C$ zusammengefasst (und statt $\leftrightarrow$ wird meist $\Longleftrightarrow$ geschrieben).

Um Missverständnisse zu vermeiden sei noch angemerkt, dass mathematische Aussagen nicht nur wahr oder falsch sondern auch nicht interpretierbar bzw. sinnlos sein können.

Betrachten Sie z.B. die folgende Aussage:

*$x$ ist gerade.*

Diese Aussage ist so nicht interpretierbar, weil nicht klar ist, was $x$ ist. Wenn wir vorher $x$ als die ganze Zahl 2 definieren (d.h. $x$ und 2 bezeichnen nun dasselbe mathematische Objekt), dann ist die Aussage wahr. Wenn wir aber $x$ als die rationale Zahl $3/2$ definieren, dann ist die Aussage wieder nicht interpretierbar (weil die Eigenschaft *gerade* nur für ganze Zahlen definiert ist).

## 1.2 Mengen

Was ist eine Menge? Wir stellen uns auf den folgenden Standpunkt Georg Cantors (1845-1918), der als Begründer der Mengenlehre gelten kann:

*Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.*

Aus der Schule kennen Sie die Mengen der *natürlichen Zahlen*, der *ganzen Zahlen*, der *rationalen Zahlen* oder der *reellen Zahlen*. Die Bezeichnungen sind $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Wir legen hier fest, dass 0 keine natürliche Zahl ist und definieren $\mathbb{N}_0$ als die Menge der ganzen Zahlen $\geq 0$.

Die Frage, was genau die reellen Zahlen sind, behandeln wir später. Mengen werden oft durch (möglicherweise unvollständige) Aufzählung ihrer Elemente beschrieben. Beispiele sind

- $\emptyset = \{\}$, die leere Menge
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Ein anderes Beispiel ist: Sei $a \in \mathbb{N}$, sei $X := \{1, 2, \ldots, a\}$. Nun ist $X$ eine Menge mit $a$ Elementen.

Die Schreibweise $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ bedeutet hingegen nicht, dass alle $x_i$ verschieden sind; $X$ hat *höchstens* $n$ aber nicht notwendigerweise genau $n$ Elemente.

Beispielsweise bedeutet die Aussage $X = \{a, b, c\}$, dass $X$ höchstens drei Elemente enthält, welche mit $a$, $b$ und $c$ bezeichnet werden.

In der Informatik spricht man jedoch oft von *Mengen von Symbolen* oder von *Alphabeten*. In der Aussage "Sei $\Sigma$ die Menge der Symbole $\{a, b, c\}$" ist dann nicht eine Menge mit höchstens drei Elementen gemeint, die mit $a$, $b$, $c$ bezeichnet werden, sondern die Menge, die genau aus den drei (unterschiedlichen) *Symbolen* $a$, $b$, $c$ besteht.

**Diskussion** Es stellt sich die Frage, inwieweit Symbole *Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens* sind. Vom mathematischen Gesichtspunkt wäre es genauer, unter einer *Menge von Symbolen* eine Menge zu verstehen, die zu jedem der angegeben Symbole ein Objekt enthält, welche alle unterschiedlich sind.

### Teilmengen

**Notation** Sei $A$ eine Teilmenge von $X$. Dann schreiben wir $A \subseteq X$. Wenn es sich um eine echte Teilmenge handelt (d.h. es gibt ein $x \in X$ so dass $x \notin A$), schreiben wir $A \subsetneq X$.

**Bemerkung** In Analogie zu den Relationen "kleiner-gleich" und "kleiner" für Zahlen wäre es folgerichtig, statt $A \subsetneq X$ einfach nur $Y \subset X$ zu schreiben. Allerdings schreiben viele Autoren $A \subset X$, wenn sie $A \subseteq X$ meinen. Ich vermeide die Bezeichnung $A \subset X$ ganz.

**Definition** Sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist

$$A^c := \{x \in X \mid x \notin A\}$$

das *Komplement* von $A$ in $X$.

**Definition** Seien $A$ und $B$ zwei Teilmengen von $X$. Dann ist $X$ eine *disjunkte Vereinigung* von $A$ und $B$, wenn gilt:

$$\text{Für alle } x \in X: \ x \in A \mathbin{\dot\vee} x \in B \ .$$

In diesem Fall schreiben wir

$$X = A \mathbin{\dot\cup} B \ .$$

Für $A \subseteq X$ gilt also offensichtlich $A \,\dot{\cup}\, A^c = X$. Die folgenden Aussagen für Teilmengen $A$ und $B$ von $X$ folgen sofort aus den De Morgan'schen Gesetzen für Aussagen:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \ .$$

Auch die folgende Aussage ist offensichtlich:

$$A \subseteq B \longleftrightarrow B^c \subseteq A^c \ .$$

### Quantoren

Mittels Mengen kann man mathematischen Aussagen wesentlich einfacher formulieren. Beispielsweise ist das Folgende eine Umformulierung der fünften Aussage zu Beginn.

*Für alle* $x, y, z \in \mathbb{Z}$, *für alle* $n \in \mathbb{N} : (n \geq 3 \wedge x^n + y^n = z^n) \longrightarrow x \cdot y \cdot z = 0$ .

Das kann man elegant mittels des All-Quantors $\forall$ aufschreiben:[1]

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq 3 \wedge x^n + y^n = z^n) \longrightarrow x \cdot y \cdot z = 0 \ .$$

Diese Aussage ist (nach Auskunft der Experten) wahr. (Aber der Beweis ist sehr lang und schwierig.) Anderseits ist die folgende Aussage falsch:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq 2 \wedge x^n + y^n = z^n) \longrightarrow x \cdot y \cdot z = 0 \ .$$

(Ein Gegenbeispiel ist $x = 3, y = 4, z = 5, n = 2$.) Die Existenz so eines Gegenbeispiels man man mittels des Existenz-Quantors $\exists$ ausdrücken:

$$\exists x, y, z \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N} : \neg((n \geq 2 \wedge x^n + y^n = z^n) \longrightarrow x \cdot y \cdot z = 0)$$

bzw.

$$\exists x, y, z \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N} : (n \geq 2 \wedge x^n + y^n = z^n) \wedge x \cdot y \cdot z \neq 0 \ .$$

(Die Klammern kann man weglassen.)

---

[1] Den All-Quantor schreibe ich mit $\forall$, den Existenzquantor mit $\exists$. Eine ältere Schreibweise ist $\bigwedge$ für den All-Quantor und $\bigvee$ für den Existenzquantor. Da letzteres leicht mit dem All-Quantor $\forall$ verwechselt werden kann, bitte ich Sie, diese Schreibweise nicht zu benutzen.

### Paradoxien

Wenn man den Mengenbegriff also generös auslegt, stößt leicht auf Paradoxien. Ein Beispiel ist die folgende sogenannte *Russelsche Antinomie*:

Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Mengen, die nicht ein Element von sich selbst sind. D.h.

$$\mathcal{M} := \{M \text{ Menge} \mid M \notin M\}$$

Für jede Menge $M$ gilt also

$$M \in \mathcal{M} \longleftrightarrow M \notin M \ .$$

Somit gilt insbesondere $\mathcal{M} \in \mathcal{M} \longleftrightarrow \mathcal{M} \notin \mathcal{M}$. Das ist offensichtlich absurd.

Aufgrund solcher Paradoxien (das Fachwort ist *Antinomien*), sollte man aufpassen, wenn man Mengen bildet. Als Regeln sollte man sich merken:

- Wenn $X$ eine Menge ist und $E$ eine Eigenschaft, die für Elemente aus $X$ definiert ist (und jeweils wahr oder falsch sein kann), dann gibt es die Teilmenge
$$\{x \in X \mid E \text{ trifft auf } x \textit{ zu} \} \ .$$
- Zu jeder Menge $X$ gibt es die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X)$. Die Elemente von $\mathcal{P}(X)$ sind genau die Teilmengen von $X$.
- Man kann Vereinigungen von Mengen bilden.

### Tupel

Seien $X$ und $Y$ Mengen. Dann besteht die Menge $X \times Y$ aus *geordneten Paaren* $(x, y)$ von Elementen $x \in X, y \in Y$. Solche geordneten Paare heißen auch *Tupel* (oder *Zweiertupel*).

Die Menge $X \times Y$ heißt *kartesisches Produkt* von $X$ und $Y$. Etwas allgemeiner erhält man zu Mengen $X_1, \ldots, X_n$ das kartesische Produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$, das aus den so genannten $n$-Tupeln $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in X_i$ besteht. Wenn $X_1 = X_2 = \cdots = X_n$, schreibt man auch $X^n$ für das kartesische Produkt.

### Das Prinzip der vollständigen Induktion

Das *Prinzip der vollständigen Induktion* ist eine Beweismethode für Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen gelten. Es handelt sich also um Aussagen der Form

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \ ,$$

wobei für $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ eine Aussage über die Zahl $n$ ist.

Aussagen dieser Form kann man wie folgt beweisen:

1. Man beweist, dass $A(1)$ gilt.

2. Man beweist für alle $n \in \mathbb{N}$, dass die Implikation $A(n) \longrightarrow A(n+1)$ gilt.

Wenn nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist, haben wir die folgenden (bewiesenen) Aussagen:

$$A(1), A(1) \longrightarrow A(2), A(2) \longrightarrow A(3), \ldots, A(n-1) \longrightarrow A(n) .$$

Hieraus folgt $A(n)$.

Es gibt zwei oft benutzte Varianten der vollständigen Induktion:

- Man beginnt die Induktion nicht bei 1 sondern bei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und zeigt $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0 : A(n)$.

- Man setzt im Induktionsschritt nicht nur $A(n)$ sondern alle vorherigen Aussagen voraus. D.h. man zeigt $A(n_0) \wedge A(n_0+1) \wedge \cdots \wedge A(n) \longrightarrow A(n+1)$.

Wir geben zwei Beispiele für Beweise mittels "vollständiger Induktion".

**Beispiel 1.1** Wir wollen beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Die Aussage $A(n)$ ist also $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis von $A(1)$

Es ist $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

Beweis der Implikation $A(n) \longrightarrow A(n+1)$

Es gelte $A(n)$, also $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dann ist $1 + + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$. $\square$

**Beispiel 1.2** Wir wollen beweisen:

Für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$ gibt es eindeutig bestimmte $p \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit

$$m = pn + r .$$

("Division mir Rest")

Hierzu *fixieren* wir $n \in \mathbb{N}$ und betrachten die folgende Aussage:[2]

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 \ : \ \exists!\,(p,r) \in \mathbb{N}_0 \times \{0,\ldots,n-1\} : m = pn + r$$

Wir zeigen dies nun mittels vollständiger Induktion nach $m$.

Beweis von $A(0)$

Es ist $0 = 0 \cdot n + 0$, und dies ist offensichtlich die einzige Möglichkeit, 0 in der Form $pn + r$ mit $p \in \mathbb{N}_0, r \in \{0,\ldots,n-1\}$ zu schreiben.

Beweis der Implikation $A(m) \longrightarrow A(m+1)$

Wir setzen voraus: Es gibt eindeutig bestimmte $p \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0,\ldots,n-1\}$ mit $m = pn + r$.

Zuerst zur *Existenz* der Darstellung von $m+1$. Seien $p_0 \in \mathbb{N}_0, r_0 \in \{0,\ldots,n-1\}$ mit

$$m = p_0 n + r_0 \ .$$

Dann ist also $m+1 = p_0 n + r + 1$. Es gibt nun zwei Fälle: Wenn $r < n-1$, dann ist $m+1 = p_0 n + (r+1)$ eine Darstellung wie gewünscht. Wenn andererseits $r = n-1$, dann ist $m+1 = (p_0+1)n + 0$ eine Darstellung wie gewünscht.

Nun zur *Eindeutigkeit*. Seien $m+1 = p_1 n + r_1$ und $m+1 = p_2 n + r_2$ zwei Darstellungen mit $p_1, p_2 \in \mathbb{N}_0, r_1, r_2 \in \{0,\ldots,n-1\}$.

Wir machen eine Fallunterscheidung in vier Fälle.

$r_1 \geq 1, r_2 \geq 1$

In diesem Fall ist $m = p_1 n + (r_1 - 1)$ und $m = p_2 n + (r_2 - 1)$ mit $r_1 - 1, r_2 - 1 \in \{0,\ldots,n-1\}$. Damit ist nach der Eindeutigkeit der Darstellung von $m$ $p_1 = p_2$ und $r_1 = r_2$.

$r_1 = 0, r_2 \geq 1$

In diesem Fall ist $m = (p_1 - 1)n + (n-1)$ und $m = p_2 n + (r_2 - 1)$ mit $p_1 - 1, p_2 \in \mathbb{N}_0, r_1 - 1 \in \{0,\ldots,n-1\}$. Nach der Eindeutigkeit der Darstellung von $m$ kann dieser Fall nicht auftreten.

$r_1 \geq 1, r_2 = 0$

Analog zum zweiten Fall kann dieser Fall nicht auftreten.

$r_1 = 0, r_2 = 0$

In diesem Fall ist $m = (p_1 - 1)n + (n-1)$ und $m = (p_2 - 1)n + (n-1)$ mit mit $p_1 - 1, p_2 - 1 \in \mathbb{N}_0$. Damit ist nach der Eindeutigkeit der Darstellung von $m$ $p_1 = p_2$. □

[2]Das Ausrufezeichen hinter "∃" deutet an, dass es genau ein Element mit der angegeben Eigenschaft gibt.

## 1.3 Abbildungen

Seien $X, Y$ Mengen. Eine *Abbildung* von $X$ nach $Y$ ist eine Vorschrift, die jedem Element aus $X$ in eindeutiger Weise ein Element aus $Y$ zuordnet. Wenn $f$ eine Abbildung von $X$ nach $Y$ ist, schreibt man $f : X \longrightarrow Y$, $X$ heißt dann *Definitionsbereich* und $Y$ heißt *Bildbereich* oder *Wertebereich*.

Ein Beispiel ist

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \, , \; x \mapsto 2x \; .$$

Hier gilt also $f(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.

Wenn allgemein $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung ist, schreibt man $f(x)$ für den *Wert* von $f$ an $x$, d.h. für dasjenige Element aus $Y$, welches $x$ zugeordnet ist, bzw. auf welches $x$ abgebildet wird.

Aus der Schule kennen Sie den Begriff der *Funktion*. “Funktion” und “Abbildung” kann man synonym benutzen, allerdings spricht man in der Regel eher dann von Funktionen, wenn der Wertebereich aus Zahlen besteht.

**Definition** Die Menge der Abbildungen von $X$ nach $Y$ wird mit $\mathrm{Abb}(X, Y)$ bezeichnet.

Einige Beispiele:

**Beispiel 1.3** Sei $X = \{x\}$. Dann besteht $\mathrm{Abb}(X, Y)$ genau aus den Abbildungen $x \mapsto a$ mit $a \in Y$.

**Beispiel 1.4** Sei andererseits $Y = \{y\}$. Dann besteht $\mathrm{Abb}(X, Y)$ aus genau einem Element.

Eine kleine Spitzfindigkeit ist das folgende Beispiel:

**Beispiel 1.5** Sei $Y$ eine beliebige Menge. Natürlich können wir dann *jedem* Element der *leeren Menge* ein Element von $Y$ zuordnen. Somit besteht $\mathrm{Abb}(\emptyset, Y)$ aus genau einem Element. Andererseits ist $\mathrm{Abb}(X, \emptyset)$ leer, wenn $X \neq \emptyset$.

**Definition** Die *identische Abbildung* $\mathrm{id}_X$ auf einer Menge $X$ ist durch $x \mapsto x$ gegeben.

**Definition** Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt

- *injektiv*, wenn für alle $x, x' \in X$ gilt: $f(x) = f(x') \longrightarrow x = x'$
- *surjektiv*, wenn für alle $y \in Y$ gilt: $\exists x \in X : f(x) = y$
- *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

**Notation** Wenn $f : X \longrightarrow Y$ injektiv ist, schreibt man auch $X \hookrightarrow Y$. Wenn $f : X \longrightarrow Y$ surjektiv ist, schreibt man auch $X \twoheadrightarrow Z$.

Einige offensichtliche Bemerkungen:

- $f$ ist genau dann injektiv, wenn für alle $x, x' \in X$ gilt: $x \neq x' \longrightarrow f(x) \neq f(x')$.
- $f$ ist genau dann bijektiv, wenn es je jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt. Dies kann man auch so beschreiben: $\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$.
- Wenn $f$ bijektiv ist, dann kann man wie folgt eine Abbildung $g : Y \longrightarrow X$ definieren: Jedem $y \in Y$ wird das eindeutig bestimmte $x \in X$ mit $f(x) = y$ zugeordnet. Diese Abbildung erfüllt $g \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Sie heißt die *Umkehrabbildung* zu $f$ und wird mit $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ bezeichnet.

Ich erinnere noch daran, dass man Abbildungen verknüpfen kann: Gegeben zwei Abbildungen $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$, hat man die Abbildung

$$g \circ f : X \longrightarrow Z,\ x \mapsto g(f(x))\ .$$

Diese Definition kann man anhand eines *kommutativen Diagramms* veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Allgemein ist ein *kommutatives Diagramm* ein Diagramm von Mengen und Abbildungen so dass gilt: Wenn immer man von einer Menge zu einer anderen "auf mehreren Wegen gehen kann", erhält man dieselbe Abbildung.

**Beispiel 1.6** Seien $X, Y, Z, W$ Mengen, und sei $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow W, h : X \longrightarrow Z, k : Z \longrightarrow W$. Die Aussage, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "k"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert, heißt, dass $g \circ f = k \circ h : X \longrightarrow W$.

**Definition** Sei $U \subseteq X$ eine Teilmenge. Durch "Einschränkung" erhalten wir dann eine Abbildung

$$f|_U : U \longrightarrow Y \, , \; x \mapsto f(x) \; .$$

Die Menge

$$f(U) := \{y \in Y \mid \exists x \in U : f(x) = y\}$$

heißt *Bild* von $U$ unter $f$. Die Menge $f(X)$ wird auch mit $\mathrm{Bild}(f)$ bezeichnet. Es ist also $f(U) = \mathrm{Bild}(f|_U)$.

Eine ungenauere aber oft vorkommende Beschreibung ist

$$f(U) = \{f(x) \mid x \in U\} \; .$$

**Bemerkung** Beachten Sie den Unterschied zwischen dem *Bildbereich* (=Wertebereich) von $f$ und dem *Bild* von $f$!

**Definition** Sei nun $V \subseteq Y$ eine Teilmenge. Die Menge

$$f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$$

heißt die *Urbildmenge* von $V$ unter $f$.

**Familien**

Wir diskutieren noch eine weitere *Sichtweise* auf Abbildungen.

Seien zwei beliebige Mengen $X$ und $I$ gegeben.

Für jedes $i \in I$ sei genau ein Element aus $X$ gegeben. Wir erhalten somit eine *Familie* von Elementen von $X$, die wir z.B. mit $(x_i)_{i \in I}$ bezeichnen können. Die Menge $I$ heißt hierbei auch *Indexmenge*. Wenn $I = \{1, \ldots, n\}$, erhalten wir so die $n$-Tupel von Elementen aus $X$, d.h. die Elemente $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$.

So eine Familie $(x_i)_{i \in X}$ ist nichts weiter als eine Abbildung (d.h. Zuordnung): Jedem $i \in I$ wird genau das Element $x_i$ zugeordnet, oder formaler: Die Famlie $(x_i)_{i \in I}$ ist per Definition identisch mit der Abbildung $I \longrightarrow X, i \mapsto x_i$.

Es gibt also keinen inhaltlichen Unterschied zwischen einer Familie und einer Abbildung. Es ist eine Frage der Sichtweise bzw. der Notation.

**Beispiel 1.7** Man kann die Menge $X^n$ als die Menge der Abbildungen $\{1, \ldots, n\} \longrightarrow X$ *definieren*. In diesem Sinne definieren wir für jede beliebige Menge $I$:

$$X^I := \mathrm{Abb}(I, X) \; .$$

**Beispiel 1.8** Eine *Folge* ist eine Familie von reellen Zahlen über der Indexmenge $\mathbb{N}$, d.h. ein Element $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$. Mit anderen Worten: Eine Folge ist per Definition eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Menge der Folgen ist also $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

**Beispiel 1.9** Seien $X_1, \ldots, X_n$ Mengen. Oben haben wir von Tupeln $(x_1, \ldots, x_n)$ (mit $x_i \in X_i$) sowie vom kartesischen Produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ gesprochen. Dieses Produkt kann man mittels Familien (d.h. mittels Abbildungen) so definieren: Oben haben wir bereits $X^n$ für eine Menge $X$ definiert. Wir definieren nun $X_1 \times \cdots \times X_n$ als die Menge der Familien $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \cup \cdots \cup X_n$ mit $x_i \in X_i$.

**Wohldefiniertheit**

Es kommt häufig vor, dass die folgende Situation gegeben ist:

Gegeben sind drei Mengen $X, Y, Z$, eine *surjektive* Abbildung $p : X \twoheadrightarrow Y$ sowie eine weitere Abbildung $f : X \longrightarrow Z$. Man fragt sich nun, ob es eine Abbildung $\overline{f} : Y \longrightarrow Z$ mit $\overline{f} \circ p = f : X \longrightarrow Z$ gibt. Mit anderen Worten: Wir wollen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, "\overline{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wiederum mit anderen Worten: Wir wollen, dass für alle $x \in X$ $\overline{f}(p(x)) = f(x)$ gilt. Da $p$ surjektiv ist, ist $\overline{f}$ hierdurch – wenn es existiert – eindeutig bestimmt. Wir erhalten auch sofort eine *notwendige Bedingung* damit $\overline{f}$ existieren kann: Es muss gelten:

$$\forall x, x' \in X : p(x) = p(x') \longrightarrow f(x) = f(x') \tag{1.1}$$

Denn, wenn $\overline{f}$ existiert und $x, x' \in X$ mit $p(x) = p(x')$ gegeben sind, dann ist $f(x) = \overline{f}(p(x)) = \overline{f}(p(x')) = f(x')$. Wenn andererseits (1.1) gilt, dann können wir mittels

$$y \mapsto f(x) \text{ für } \textit{irgendein } x \in X \text{ mit } p(x) = y$$

eine Abbildung $\overline{f} : Y \longrightarrow Z$ definieren. Der entscheidende Punkt ist, dass $\overline{f}(y)$ nun nicht von der Wahl von $x$ abhängt, man also eine *eindeutige Zuordnung*, eben eine Abbildung erhält. Die Unabhängigkeit von der Wahl von $x$ nennt man *Wohldefiniertheit*. Wir fassen dies zusammen:

**Aussage 1.10** *Seien $X, Y, Z$ drei Mengen, $p : X \longrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung, $f : X \longrightarrow Z$ irgendeine Abbildung. Dann gibt es höchstens eine Abbildung $\overline{f} : Y \longrightarrow Z$ mit $\overline{f} \circ p = f$. So eine Abbildung $\overline{f}$ gibt es genau dann, wenn die Bedingung (1.1) erfüllt ist.*

**Aussage 1.11** *Seien die Notationen wie oben. Dann existiert $\overline{f}$ genau dann und ist injektiv, wenn gilt:*

$$\forall x, x' \in X : p(x) = p(x') \longleftrightarrow f(x) = f(x') \tag{1.2}$$

Der Beweis ist leicht.

**Kardinalität**

**Definition** Eine Menge $X$ heißt *endlich*, wenn es eine natürlich Zahl $n$ und eine Bijektion $\{1, \ldots, n\} \longrightarrow X$ gibt, andernfalls *unendlich*. Eine Menge heißt *abzählbar*, wenn es eine Surjektion $\mathbb{N} \longrightarrow X$ gibt.

**Bemerkung** Beachten Sie, dass eine “abzählbare Menge” endlich sein kann!

Man kann (mittels vollständiger Induktion) zeigen:

**Lemma 1.12** *Sei $X$ eine endliche Menge, und seien $n$ und $m$ zwei natürliche Zahlen so dass es Bijektionen $\{1, \ldots, n\} \longrightarrow X$ und $\{1, \ldots, m\} \longrightarrow X$ gibt. Dann ist $n = m$.*

Damit können wir definieren:

**Definition** Wenn es eine Bijektion $\{1, \ldots, n\} \longrightarrow X$ gibt, dann heißt $n$ die *Kardinalität* von $X$ und wird mit $\#X$ oder $|X|$ bezeichnet. Wenn $X$ unendlich ist, so schreibt man $\#X = |X| = \infty$.

## 1.4 Relationen

Sei $X$ eine Menge. Eine *Relation* auf $X$ ist intuitiv eine Eigenschaft, die für je zwei Elemente aus $X$ gelten kann oder nicht. Wenn die Eigenschaft für $(x, y) \in X \times X$ gilt, dann sagt man auch, dass $x$ und $y$ in *Relation zueinander stehen* (bez. der gegebenen Eigenschaft).

Einfache Beispiele für die ganzen Zahlen sind die Beziehungen $<, \leq, >, \geq$ und natürlich auch $=$.

Ein anderes Beispiel wiederum für $\mathbb{Z}$ ist: “$x - y$ ist gerade” (wobei $x, y \in \mathbb{Z}$). Hier stehen also je zwei gerade Zahlen zueinander in Relation und je zwei ungerade Zahlen stehen zueinander in Relation. Hingegen stehen jeweils eine gerade und einer ungerade Zahl (oder umgekehrt) nicht zueinander in Relation.

Eine formale Definition einer Relation erhält man, indem man von der oben erwähnten Eigenschaft zu der Teilmenge von $X \times X$ übergeht, die durch die Eigenschaft definiert wird.

**Definition** Eine Relation auf einer Menge $X$ ist eine Teilmenge von $X \times X$.

Sei nun $R$ eine Relation, und seien $x, y \in X$. Dann sagen wir, dass $x$ (bezüglich $R$) *in Relation zu $y$ steht*, wenn $(x, y) \in R$. In diesem Fall schreiben wir $x \sim_R y$.[3] (Andere Autoren schreiben auch $xRy$.)

Andernfalls schreiben wir $x \nsim_R y$.

Oft wird $\sim_R$ durch ein anderes Symbol wie z.B. die obigen $(<, \leq, \ldots)$ oder auch einfach $\sim$ ersetzt.

**Beispiel 1.13** Die (übliche) Relation $\geq$ auf $\mathbb{Z}$ ist durch $x \geq y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{N}_0$ definiert. Mit anderen Worten: Sie ist durch die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \in \mathbb{N}_0\}$$

gegeben.

### Äquivalenzrelationen

Sei $X$ eine Menge und $R$ eine Relation auf $X$.

**Definition** Die Relation $R$ heißt *Äquivalenzrelation*, falls gilt:

$$\begin{array}{ll} (R) & \forall x \in X : x \sim_R x \\ (S) & \forall x, y \in X : x \sim_R y \longleftrightarrow y \sim_R x \\ (T) & \forall x, y, z \in X : x \sim_R y \wedge y \sim_R z \longrightarrow x \sim_R z \end{array}$$

Die Bedingungen (R), (S), (T) heißen *Reflexivität*, resp. *Symmetrie*, resp. *Transitivität*.

Wenn $R$ eine Äquivalenzrelation ist, schreibt man meist $x \sim y$ anstatt $x \sim_R y$. Man sagt dann auch, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Aufgrund der Symmetrie sagt man auch, dass $x$ und $y$ *zueinander in Relation stehen*, wenn $x \sim_R y$.

[3] Immer wenn ich in einer *Definition* schreibe *"Wenn ..., dann sagen wir ..."*, meine ich *"Genau dann wenn ..."*.

**Beispiel 1.14** Zu Beginn dieses Abschnitts haben wir die folgende Relation auf $\mathbb{Z}$ erwähnt:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \text{ ist gerade} \ .$$

Die Eigenschaften (R), (S), (T) sind offensichtlich, es handelt sich also um eine Äquivalenzrelation.

Man kann dieses Beispiel leicht wie folgt verallgemeinern: Sei $n$ eine natürliche Zahl $> 1$, und seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Dann heißen $x$ und $y$ *kongruent* zueinander modulo $n$, wenn $x - y$ durch $n$ teilbar ist (d.h. falls ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $y = x + an$ existiert). Wenn $x$ und $y$ (modulo $n$) kongruent zueinander sind, schreibt man

$$x \equiv y \mod n \ .$$

Diese "Kongruenz modulo $n$" ist offensichtlich auch eine Äquivalenzrelation.

**Beispiel 1.15** Sei $X$ eine beliebige Menge. Dann ist "=" eine Äquivalenzrelation.

Sei nun eine Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben.

**Definition** Zu $x \in X$ definieren wir

$$[x]_\sim := \{y \in X \mid x \sim y\} \ ,$$

die *Äquivalenzklasse* zu $x$. Wir schreiben auch $[x]$, wenn die Relation offensichtlich ist.

**Aussage 1.16** *Seien $x, y \in X$ und (und somit $[x]_\sim$ und $[y]_\sim$ zwei Äquivalenzklassen). Dann gilt: Entweder ist $[x]_\sim = [y]_\sim$ oder es ist $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$.*

*Beweis.* Eine Umformulierung der Aussage ist die folgende Implikation:

$$[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset \longrightarrow [x]_\sim = [y]_\sim \ . \tag{1.3}$$

Bevor wir diese Implikation beweisen, legen wir noch eine Notation fest:

Wenn $x_1, \ldots, x_n \in X$ gegeben sind und $x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3, \ldots, x_{n-1} \sim x_n$, dann stehen nach der Transitivität alle $x_i$ zueinander in Relation. Dies deuten wir mit $x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_n$ an.

Wir zeigen nun die Implikation. Sei also $[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim$. Es gilt also $x \sim z$, $y \sim z$. Nach der Symmetrie gilt $z \sim y$. Somit gilt $x \sim z \sim y$.

Sei nun $x' \in [x]_\sim$ beliebig. Dann ist

$$y \sim x \sim x' \ .$$

Somit ist also $x' \in [y]_\sim$.

Soeben haben wir gezeigt, dass $[x]_\sim \subseteq [y]_\sim$. Analog zeigt man $[y]_\sim \subseteq [x]_\sim$. Damit sind die beiden Mengen gleich. □

Alle Äquivalenzklassen sind Teilmengen von $X$, und somit sind sie *Elemente* der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$. Wir können somit die *Menge der Äquivalenzklassen* (in $X$ bez. $\sim$) betrachten.

**Notation** Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $X_{/\sim}$.

Wir haben also

$$X_{/\sim} = \{M \in \mathcal{P}(X) \mid \exists x \in X : M = [x]_\sim\}$$

oder (etwas ungenauer)

$$X_{/\sim} = \{[x]_\sim \mid x \in X\} .$$

**Beispiel 1.17** Wir kommen auf die in Beispiel 1.14 diskutierte Äquivalenzrelation "Kongruenz modulo $n$" zurück. Für $x \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse "modulo $n$" mit $[x]_n$. Es ist also

$$[x]_n = \{x + an | a \in \mathbb{Z}\} .$$

Wir haben $n$ Äquivalenzklassen, nämlich $[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n$.

Im letzten Abschnitt haben wir den Konzept der Wohldefiniertheit einer Abbildung diskutiert. Wir wenden dies nun auf Äquivalenzrelationen an.

Wir nehmen an, dass wir eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ gegeben haben. Wir fragen uns, ob es eine Abbildung $\overline{f} : X_{/\sim} \longrightarrow Y$ mit $\overline{f}([x]_\sim) = f(x)$ für alle $x \in X$ gibt. Hierzu betrachten wir die surjektive Abbildung $p : X \longrightarrow X_{/\sim},\ x \mapsto [x]_\sim$. Aussage 1.10 liefert nun:

**Aussage 1.18** *Sei $f : X \longrightarrow Y$ gegeben. Dann gibt es genau dann eine Abbildung $\overline{f} : X_{/\sim} \longrightarrow Y$ mit $\overline{f}([x]_\sim) = f(x)$ für alle $x \in X$, wenn gilt:*

$$\forall x, x' \in X : x \sim x' \longrightarrow f(x) = f(x')$$

*(und in diesem Fall ist $\overline{f}$ eindeutig bestimmt).*

**Definition** Eine *Partition* einer Menge $X$ ist eine Teilmenge $\mathcal{M}$ von $\mathcal{P}(X)$ (d.h. eine Menge von Teilmengen von $X$) mit der folgenden Eigenschaften:

- Alle Mengen in $\mathcal{M}$ sind nicht-leer.

- Für alle $x \in X$ existiert genau eine Menge $M \in \mathcal{M}$ mit $x \in M$.

Wenn $\mathcal{M}$ eine Menge von Teilmengen von $X$ mit der zweiten obigen Eigenschaft ist, sagt man auch, dass $X$ die *disjunkte Vereinigung* der Mengen in $\mathcal{M}$ ist. (Dies ist eine Verallgemeinerung der entsprechenden Definition in Abschnitt 1.2.) Hierfür schreibt man:

$$X = \dot{\bigcup}_{M \in \mathcal{M}} M$$

Aus der Reflexivität und Lemma 1.16 folgt:

**Aussage 1.19** *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Dann bildet die Menge der Äquivalenzklassen $X_{/\sim}$ eine Partition von $X$.*

Umgekehrt kann man auch jeder Partition eine Äquivalenzrelation zuordnen. Sei hierzu $\mathcal{M}$ eine Partition von $X$. Zuerst ordnen wir jedem $x$ die eindeutig bestimmte Menge $M \in \mathcal{M}$ mit $x \in M$ zu. Diese bezeichnen wir mit $[x]_{\mathcal{M}}$. Dann definieren wir wie folgt eine Relation:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow [x]_{\mathcal{M}} = [y]_{\mathcal{M}}$$

Die Eigenschaften (R), (S), (T) folgen sofort, und $[x]_{\mathcal{M}}$ ist nun die Äquivalenzklasse zu $x$.

**Definition** Sei $\mathcal{M}$ eine Partition von $X$. Ein *Repräsentantensystem* zu $\mathcal{M}$ ist eine Teilmenge $A$ von $X$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $M \in \mathcal{M}$ existiert genau ein $a \in A$ mit $[a]_{\mathcal{M}} = M$.

Ein Repräsentantensystem einer Äquivalenzrelation ist der Definition ein Repräsentantensystem der zugehörigen Partition. D.h. ein Repräsentantensystem zu einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf $X$ ist eine Teilmenge $A$ von $X$ mit:

$$\forall x \in X \, \exists! \, a \in A : x \sim a \, .$$

**Beispiel 1.20** Wir betrachten wieder die Relation "Kongruenz modulo $n$" auf $\mathbb{Z}$. Ein Repräsentantensystem dieser Relation ist z.B. die Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

### Das Auswahlaxiom (Diskussion)

Betrachten wir nun die folgende Aussage.

*Jede Partition einer Menge hat ein Repräsentantensystem.*

Ein Beweis dieser Aussage ist scheinbar sehr leicht: Gegeben eine Partition $\mathcal{M}$ auf $X$ wählt man aus jeder Menge $M \in \mathcal{M}$ ein (beliebiges) Element $m \in$

$M$ aus. Nehmen wir an, wir haben so eine Auswahl getroffen. Dann haben wir also eine Zuordnung (d.h. Abbildung) $f : \mathcal{M} \longrightarrow X$ mit $f(M) \in M$ für alle $M \in \mathcal{M}$.

Aber gibt es so eine Abbildung immer? Hier fragen wir nach einem Argument, dass die Existenz einer solchen Abbildung auf "offensichtlichere" Aussagen zurückführt. Eine überraschende Erkenntnis der Mengenlehre ist, dass dies in einer gewissen Hinsicht nicht möglich ist. Man sollte die obige Aussage als ein zusätzliches Axiom der Mengenlehre akzeptieren. Es ist das sogenannte *Auswahlaxiom*.

Es sei noch bemerkt, dass die Tatsache, dass das Auswahlaxiom nicht so naheliegend wie die anderen Axiome der Mengenlehre ist, auch Kritiker auf den Plan ruft, die die Verwendung des Auswahlaxioms ablehnen. Diese Kritiker nehmen jedoch eine Außenseiterrolle in der Gemeinschaft der Mathematiker ein.

### Ordnungsrelationen

Sei wiederum $X$ eine Menge und $R$ eine Relation auf $X$.

**Definition** Die Relation $R$ heißt *Ordnungsrelation*, falls gilt:

$$(R) \quad \forall x \in X : x \sim_R x$$

$$(A) \quad \forall x, y \in X : x \sim_R y \wedge y \sim_R x \longrightarrow x = y$$

$$(T) \quad \forall x, y, z \in X : x \sim_R y \wedge y \sim_R z \longrightarrow x \sim_R z$$

Eine Ordnungsrelation heißt *vollständig* oder eine *lineare Relation*, falls gilt:

$$(V) \quad \forall x, y \in X : x \sim_R y \vee y \sim_R x \; .$$

Die Bedingungen (R) und (T) sind die schon bekannte Reflexivität und Transitivität, die Bedingung (A) heißt *Antisymmetrie*. Wenn $R$ eine vollständige Relation auf $X$ ist, heißt $X$ (bezüglich $R$) *linear geordnet*.

**Beispiel 1.21** Die Relationen kleiner-gleich bzw. größer-gleich auf $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ sind lineare Relationen.

**Beispiel 1.22** Sei $X$ eine beliebige Menge. Dann ist "$\subseteq$" eine Ordnungsrelation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$. Diese Relation ist aber nicht linear, wenn $X$ mehr als ein Element besitzt. (Wenn $x$ und $y$ zwei verschiedene Elemente sind, gilt weder $\{x\} \subseteq \{y\}$ noch $\{y\} \subseteq \{x\}$.)

**Lemma 1.23** *Sei $X$ eine Menge, und sei $\leq$ eine Ordnungsrelation auf $X$. Dann gibt es höchstens ein $x \in X$ mit $\forall y \in X : y \leq x$.*

*Beweis.* Seien $x_1, x_2$ zwei solche Elemente. Dann ist insbesondere $x_2 \leq x_1$ und $x_1 \leq x_2$. Damit ist $x_1 = x_2$. $\square$

**Definition** Sei eine Ordnungsrelation $\leq$ auf der Menge $X$ gegeben. Ein Element $x \in X$ wie im letzten Lemma heißt *größtes Element* von $X$.

Ein Element $x \in X$ so dass

$$\forall y \in X : x \leq y \longrightarrow y = x$$

heißt ein *maximales Element* von $X$.

Wenn $X$ ein größtes Element hat, dann ist dies (offensichtlich) auch ein maximales Element, und auch das einzige maximale Element.

In vielen wichtigen Beispielen gibt es jedoch mehrere maximale Elemente und kein größtes Element. Hier ist ein instruktives Beispiel.

**Beispiel 1.24** Sei $X := \{1, 2, \ldots, 100\}$, und sei $Y$ die Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$, die aus den Teilmengen von $X$ mit höchstens 10 Elementen besteht. Wir betrachten die partielle Ordnung "$\subseteq$" auf $Y$. Nun ist jede Teilmenge mit genau 10 Elementen ein maximales Element von $Y$, und es gibt kein größtes Element (es gibt keine Teilmenge von $X$ mit höchstens 10 Elementen, die alle Teilmengen mit höchstens 10 Elementen umfasst).

**Bemerkung** Analog zu den obigen Definitionen kann man *kleinste Elemente* und *minimale Elemente* definieren.

### Relationen zwischen zwei Mengen

Man kann den Begriff der Relation erweitern und allgemeiner Relationen zwischen zwei Mengen betrachten. Seien dazu zwei Mengen $X$ und $Y$ gegeben.

**Definition** Eine *Relation zwischen* $X$ *und* $Y$ ist eine Teilmenge von $X \times Y$.

**Notation** Wenn $R$ eine Relation zwischen $X$ und $Y$ ist und $x \in X, y \in Y$, dann schreiben wir $x \sim_R y$ falls $(x, y) \in R$.

Wir werden diese Verallgemeinerung nicht weiter verfolgen und bemerken nur, wie man mittels dieses Begriffs der Relation definieren kann, was eine Abbildung ist. Wir erinnern uns, dass eine Abbildung von $X$ nach $Y$ jedem Element von $X$ genau ein Element von $Y$ zuordnet. Wir erhalten somit die folgende formale Definition.

**Definition** Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist eine Relation zwischen $X$ und $Y$ so dass für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $x \sim_f y$ existiert.

**Bemerkung** Aus der Schule kennen Sie den Begriff des *Graphen* einer Funktion. Dies kann man wie folgt für beliebige Abbildungen definieren: Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann ist der *Graph* von $f$ die Menge $\{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$. Nach der obigen Definition sind allerdings eine Abbildung und ihr Graph identisch! Es ist jedoch üblich und sinnvoll, zwischen einer Abbildung und ihrem Graphen zu unterscheiden und z.B. den Graphen einer Abbildung $f$ mit $\Gamma_f$ zu bezeichen. (Dann ist also $f(x) = y \longleftrightarrow x \sim_f y \longleftrightarrow (x, y) \in \Gamma_f$.)

**Diskussion** In Beispiel 1.9 haben wir diskutiert, wie man Tupel mittels Abbildungen definieren kann, und oben haben wir Abbildungen mittels Tupel definiert. Diese zirkuläre Definition sollte natürlich aufgehoben werden. Der übliche Weg ist, rein mengentheoretisch zu definieren, was unter einem Zweiertupel $(x, y)$ für $x, y \in X \times Y$ zu verstehen ist. Man definiert z.B.: $(x, y) := \{x, \{x, y\}\}$.

Eine alternative Möglichkeit wäre, den Abbildungsbegriff axiomatisch vorauszusetzen und die Mengenlehre darauf aufzubauen.