Musterlösung zum 2. Test am 19.1.2009

Aufgabe 1

Es folgen die richtigen Antworten mit einigen Erläuterungen.

- a) Richtig. (Das ist trivial. :-))
- b) Falsch. Gegenbeispiel: Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Richtig wäre gewesen: "..., wenn $\tilde{A}$ nur "Stufenspalten" enthält.)
- c) Falsch. Das ist sogar immer falsch. Denn: Mehr als n Vektoren im K^n sind immer linear abhängig.
- d) Falsch. Gegenbeispiel: Die Null-Matrix (alle Einträge sind 0.)
- e) Richtig. Beweis: Die Spalten von B sind linear abhängig. Also ist $\text{Kern}(\Lambda_B) \neq \{0\}$. Folglich ist auch $\text{Kern}(\Lambda_A \circ \Lambda_B) \neq \{0\}$. Also ist Λ_{AB} nicht invertierbar und also BA auch nicht.
- f) Falsch. Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $AB = (1)$, und diese Matrix ist invertierbar.

Aufgabe 2

- a) Polynomdivision ergibt:

$$f = (X - 1) \cdot g - 2X + 2, \quad g = \left(-\frac{1}{2} \cdot X - 1\right) \cdot (-2X + 2) + 5$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \text{ggT}(f, g) &= 1 \\ &= \frac{1}{5} \cdot (g + \left(\frac{1}{2} \cdot X + 1\right)(-2X + 2)) \\ &= \frac{1}{5} \cdot (g + \left(\frac{1}{2} \cdot X + 1\right)(f - (X - 1) \cdot g)) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \cdot X + 1\right)f + \left(1 - \left(\frac{1}{2} \cdot X + 1\right)(X - 1)\right) \cdot g\right) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \cdot X + 1\right)f + \left(1 - \frac{1}{2}X^2 - X + \frac{1}{2}X + 1\right) \cdot g\right) \\ &= \left(\frac{1}{10} \cdot X + \frac{1}{5}\right) \cdot f + \left(-\frac{1}{10}X^2 - \frac{1}{10}X + \frac{2}{5}\right) \cdot g \end{aligned}$$

Eine mögliche Lösung ist folglich $a = \frac{1}{10} \cdot X + \frac{1}{5}$ und $b = -\frac{1}{10}X^2 - \frac{1}{10}X + \frac{2}{5}$.
 Außerdem ist $[g]_{(f)}$ invertierbar mit $[g]_{(f)}^{-1} = -\frac{1}{10}[X]^2 - \frac{1}{10}[X] + \frac{2}{5}$.

b) Wenn man die obige Rechnung “modulo 5” nimmt, erhält man in $\mathbb{F}_5[X]$:

$$f = (X - 1) \cdot g - 2X + 2, g = \left(-\frac{1}{2} \cdot X - 1\right) \cdot (-2X + 2).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \text{ggT}(f, g) &= \frac{-1}{2}(-2X + 2) = X - 1 = X + 4 \\ &= \frac{1}{2}(-f + (X - 1) \cdot g) \\ &= 3(-f + (X - 1) \cdot g) \\ &= 2f + (3X + 2) \cdot g \end{aligned}$$

Eine mögliche Lösung ist folglich $a = 2, b = 3X + 2$. Da $\text{ggT}(f, g) \neq 1$, ist $[g]_{(f)}$ nicht invertierbar.

Aufgabe 3 Elementare Zeilenumformungen liefern:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & a+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Fall: $a \neq -2$.

Dann erhalten wir:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der “Ablesetrick” liefert: Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bildet eine Basis von $\text{Kern}(A)$.

Außerdem bilden die 1., 2., 4. Spaltenvektoren von A ($= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$)

eine Basis von $\text{Bild}(A)$.

2. Fall: $a = -2$.

Dann erhalten wir:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der "Ablesetrick liefert nun: Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis

von $\text{Kern}(A)$. Außerdem bilden die 1. und 2. Spaltenvektoren von $A (= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix})$

eine Basis von $\text{Bild}(A)$.

Aufgabe 4

1. Beweis

Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Wir müssen also zeigen, dass $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ genau dann linear unabhängig ist, wenn es ein Erzeugendensystem ist. Sei A die Matrix, deren Spalten den Vektoren $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ besteht. Sei $\tilde{A}$ eine Matrix in Zeilenstufenform, die aus A durch elementare Zeilenumformungen hervorgeht. (Z.B. kann $\tilde{A}$ die Zeilennormalform von A sein.)

Nun ist $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ genau dann linear unabhängig, wenn jede Spalte in $\tilde{A}$ eine "Stufenspalte" ist. Und $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ bildet genau dann ein Erzeugendensystem, wenn $\tilde{A}$ keine Nullzeile enthält. Da $\tilde{A}$ aber quadratisch ist (!), sind diese beiden Aussagen äquivalent.

2. Beweis

Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Der 3. Punkt impliziert also die ersten beiden. Es reicht also zu zeigen, dass so sowohl der 1. also auch der 2. Punkt den 3. impliziert.

Seien die Vektoren linear unabhängig. Dann bilden Sie ein maximales linear unabhängiges System. Denn: Wenn man einen Vektor hinzunimmt, hat man $n + 1$ Vektoren in K^n , und diese sind immer linear abhängig (siehe Vorlesung). Ein maximales linear unabhängiges System ist aber eine Basis.

Nehmen wir nun an, dass die Vektoren ein Erzeugendensystem von K^n bilden. Dann bilden sie ein minimales Erzeugendensystem. Denn: Wenn man einen Vektor wegnimmt, hat man $n - 1$ Vektoren in K^n , und diese bilden kein Erzeugendensystem von K^n (siehe Vorlesung). Ein minimales Erzeugendensystem ist aber eine Basis.