Musterlösung zum 1. Test am 1.12.2008

Aufgabe 1

Es folgen *mögliche* Antworten.

a) $\mathbb{Z}$ mit der Verknüpfung “minus”. Z.B. ist $(1-1)-1=-1$ aber $1-(1-1)=1$.

b) $\mathbb{N}_0$ mit der Addition oder $\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation. Im ersten Fall hat z.B. 1 kein Inverses, im zweiten Fall hat z.B. 2 kein Inverses.

c) S_3, die symmetrische Gruppe auf 3 Elementen. Sei τ_{12} gegeben durch $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3$, τ_{13} durch $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1$. Dann ist $\tau_{12} \circ \tau_{13} \neq \tau_{13} \circ \tau_{12}$, denn $(\tau_{12} \circ \tau_{13})(1) = 3$ aber $(\tau_{13} \circ \tau_{12})(1) = 2$.

d) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Hier ist $[2]_4$ nicht invertierbar (denn $[2]_4 \cdot [2]_4 = [0]_4$). Allgemeiner: Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ keine Primzahl und $m|n, m \neq n$. Dann ist $[m]_n$ nicht invertierbar in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2

a) Sei $x \in V$. Dann ist $f(x) \in f(V)$ und somit $x \in f^{-1}(f(V))$.

b) Sei f injektiv. Sei nun $V \subseteq X$. Zu zeigen ist nun: $f^{-1}(f(V)) \subseteq V$. Sei hierzu $x \in f^{-1}(f(V))$. Dann ist $f(x) \in f(V)$. Somit gibt es ein $x' \in V$ mit $f(x) = f(x')$. Nach Vor. ist somit $x = x'$, also insb. $x \in V$.

Es gelte für alle $V \subseteq X$: $V = f^{-1}(f(V))$. Seien $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$. Somit ist also $f(x') \in f(\{x\})$ und somit $x' \in f^{-1}(f(\{x\}))$. Nach Vor. ist also $x' \in \{x\}$, also $x' = x$. Hiernach ist f injektiv.

Aufgabe 3

a) Alle Eigenschaften sind offensichtlich erfüllt. Es ist sowohl eine Äquivalenz- als auch eine Ordnungsrelation.

b) Reflexivität: Nicht erfüllt. Z.B. ist nicht $1 > 1$.
Symmetrie: Nicht erfüllt. Z.B. ist $2 > 1$ aber nicht $1 > 2$.
Transitivität: Erfüllt. Wenn $a > b$ und $b > c$, dann ist auch $a > c$.

Antisymmetrie: Erfüllt. (Das ist "trickreich".) Es gibt keine $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a > b$ und $b > a$. Somit ist die Implikation (!)

$$a > b \wedge b > a \longrightarrow a = b$$

immer richtig.
Es ist keine Äquivalenz- und keine Ordnungsrelation.

c) Reflexivität: Nicht erfüllt. Z.B. gilt nicht $0 \sim 1$ (es ist nicht $0 = 0 + 1$).
Symmetrie: Nicht erfüllt. Z.B. gilt $1 \sim 0$ aber nicht $0 \sim 1$ (es ist $1 = 0 + 1$ aber nicht $0 = 1 + 1$).
Transitivität: Nicht erfüllt. Z.B. ist gilt $1 \sim 0$ und $0 \sim -1$ aber nicht $1 \sim -1$ (es ist $1 = 0 + 1$ und $0 = (-1) + 1$ aber nicht $1 = (-1) + 1$).
Antisymmetrie: Erfüllt. (Begründung wie in b).)
Es ist keine Äquivalenz- und keine Ordnungsrelation.

d) Reflexivität: Erfüllt. Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x \leq x + 1$.
Symmetrie: Nicht erfüllt. Z.B. gilt $-2 \sim 0$ aber nicht $0 \sim -2$ (es ist $-2 \leq 0 + 1$ aber nicht $0 \leq (-2) + 1$).
Transitivität: Nicht erfüllt. Z.B. gilt $1 \sim 0$ und $0 \sim -1$ aber nicht $1 \sim -1$ (es ist $1 \leq 0 + 1$ und $0 \leq (-1) + 1$ aber nicht $1 \leq (-1) + 1$).
Antisymmetrie: Nicht erfüllt. Z.B. gilt $1 \sim 0$ und $0 \sim 1$ (es ist $1 \leq 0 + 1$ und $0 \leq 1 + 1$).
Es ist keine Äquivalenz- und keine Ordnungsrelation.

Aufgabe 4

Es ist zu zeigen: $\text{Kern}(\varphi) = \{0\}$. Oder mit anderen Worten: Für alle $a \in K$ mit $a \neq 0$ gilt $a \notin \text{Kern}(\varphi)$.
Sei also $a \in K$ mit $a \neq 0$. Dann ist also $a^{-1} \cdot a = 1$. Somit ist $\varphi(a^{-1}) \cdot \varphi(a) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(1) = 1$. Also ist insb. $\varphi(a) \neq 0$. Damit ist $a \notin \text{Kern}(\varphi)$.