Musterlösung zur Klausur Lineare Algebra für Informatiker WS 2008/09

Aufgabe 1 Welche der folgenden Aussagen ist immer wahr (**w**) oder manchmal falsch (**f**)? Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen – aber man bekommt mindestens Null Punkt auf die Aufgabe als ganzes. Sie dürfen sich enthalten.

a) Seien X, Y zwei Mengen, wobei X endlich und Y unendlich ist. Dann gibt es eine injektive Abbildung von X nach Y.

b) "Teilbarkeit" auf $\mathbb{N}$ ist eine Äquivalenzrelation.

c) Sei $\leq$ eine vollständige Ordnungsrelation auf einer Menge X, und sei $x \in X$ ein maximales Element bez. $\leq$. Dann ist x auch ein größtes Element.

d) Seien G und H zwei endliche Gruppen mit $\#G < \#H$. Dann gibt es einen injektiven Homomorphismus von G nach H.

e) Sei K ein Körper und $f(X) \in K[X]$ nicht-konstant. Dann ist f genau dann irreduzibel, wenn es keine Nullstelle in K hat.

f) Sei K ein Körper. Dann ist $K^{2\times 2}$, der Ring der 2×2-Matrizen über K, nicht-kommutativ.

g) Sei K ein Körper und seien $A \in K^{m\times n}$ und $\underline{b} \in K^n$. Dann ist der Lösungsraum des LGS $A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{b}$ ein linearer Unterraum von K^n.

h) Sei K ein Körper und sei $A \in K^{m\times n}$ so dass die Spalten von A linear unabhängig sind. Dann hat das homogene LGS $A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{0}$ nur die "triviale" Lösung $\underline{0}$.

i) Sei K ein Körper und sei $A \in K^{m\times n} \in K^n$ mit $\mathrm{Rang}(A) < m$. Dann hat das homogene LGS $A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{0}$ eine "nicht-triviale" Lösung, d.h. eine Lösung $\neq \underline{0}$.

j) Sei K ein Körper und seien $A \in K^{m\times n}, \underline{b} \in K^n$ mit $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|\underline{b})$. Dann ist das LGS $A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{b}$ lösbar.

Lösungen

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)
(w)	(f)	(w)	(f)	(f)	(w)	(f)	(w)	(f)	(w)

Aufgabe 2 Sei K ein Körper, und sei U die Menge der 2×2 "oberen Dreicksmatrizen". D.h.

$$U := \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in K \} .$$

Zeigen Sie:

a) U ist ein Untermonoid von $(K^{2\times 2}, \cdot)$

b) U ist ein Untervektorraum von des K-Vektorraums $K^{2\times 2}$.

<u>Lösung.</u>
zu a) (5 Punkte)
Das neutrale Element, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ist offensichtlich in U enthalten.
Zu zeigen ist die Abgeschlossenheit unter Multiplikation. Seien also $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \in U$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \in U .$$

zu b) (5 Punkte: 1 + 2 +2)
Wir benutzen das Untervektorraumkriterium. (Es geht aber auch leicht ohne.)
- Es ist $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$.
- Seien $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \in U$ und $\lambda \in K$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda a_2 & b_1 + \lambda b_2 \\ 0 & c_1 + \lambda c_2 \end{pmatrix} \in U .$$

Aufgabe 3 Sei G eine additiv geschriebene abelsche Gruppe, und sei U eine Untergruppe von G. Wie in der Vorlesung definieren wir eine Relation auf G durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in U .$$

Zeigen Sie *ohne Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung*:

a) Die soeben definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation

b) Sei wie in der Vorlesung $G_{/\sim_U}$ die Menge der Äquivalenzklassen, und sei zu $x \in G$ $[x]_U$ die Äquivalenzklasse zu x. Dann wird mittels $[x]_U + [y]_U := [x+y]_U$ eine Verknüpfung auf $G_{/\sim_U}$ definiert.

<u>Lösung.</u>
zu a) (6 Punkte: 2 + 2 + 2)
Reflexivität: Sei $x \in G$. Dann ist $x - x = 0 \in U$. Somit ist $x \sim x$.
Symmetrie: Seien $x, y \in G$ mit $x \sim y$. Dann ist also $x - y \in U$ und somit auch $-(x-y) = y - x \in U$. Also ist $y \sim x$.
Transitivität: Seien $x, y, z \in G$ mit $x \sim y, y \sim z$. Dann ist also $x - y \in U$ und $y - z \in U$. Somit ist auch $x - z = (x - y) + (y - z) \in U$.
zu b) (4 Punkte)
Die Wohldefiniertheit ist zu zeigen. Seien somit $x, x', y, y' \in G$ mit $[x]_U = [x']_U, [y]_U = [y']_U$. Dann ist also $x - x' \in U$ und $y - y' \in U$. Somit ist $(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in U$, weil U abgeschlossen ist. Also ist $[x + y]_U = [x' + y']_U$.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie das (multiplikative) Inverse von $[43]_{59} \in \mathbb{Z}/59\mathbb{Z}$!

b) Bestimmen Sie jeweils den ggT der folgenden beiden Polynome f, g in $\mathbb{Q}[X]$ sowie in $\mathbb{F}_7[X]$!

$$f := X^3 + 4X + 2 \qquad g := X^2 + 2X + 4$$

Lösung.
zu a) (5 Punkte: 2 + 3)
Mit den Euklidischen Algorithmus haben wir

$$\begin{aligned} 59 &= 43 + 16 \\ 43 &= 2 \cdot 16 + 11 \\ 16 &= 11 + 5 \\ 11 &= 2 \cdot 5 + 1 \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $1 = 11-2\cdot 5 = 11-2\cdot(16-11) = -2\cdot 16+3\cdot 11 = -2\cdot 16+3\cdot(43-2\cdot 16) = 3\cdot 43 - 8\cdot 16 = 3\cdot 43 - 8\cdot(59-43) = -8\cdot 59 + 11\cdot 43$.
Somit ist $11 \cdot 43 \equiv 1 \mod 59$. Hieraus folgt: $[43]_{59}^{-1} = [11]$.

zu b) (5 Punkte: 2,5 + 2,5)
Wir haben in $\mathbb{Q}[X]$:

$$X^3 + 4X + 2 = (X-2)(X^2 + 2X + 4) + 4X + 10 \, .$$

Statt mit $4x + 10$ können wir mit $X + \frac{5}{2}$ weiterrechnen. Wir haben

$$X^2 + 2X + 4 = (X - \frac{1}{2}) \cdot (X + \frac{5}{2}) + 21 \, .$$

Somit ist der ggT der beiden Polynome gleich 1.

In $\mathbb{F}_7[X]$ ist die Rechnung auch richtig. (Man muss $\frac{5}{2}$ nur richtig interpretieren als $5 \cdot 2^{-1} = 5 \cdot 4 = 20 = 6 \in \mathbb{F}_7$.) Dann ist allerdings $21 = 0$. Somit ist der ggT dann gleich $X + \frac{5}{2} = X + 6 = X - 1$.

Aufgabe 5 Wir betrachten für $a, b \in \mathbb{Q}$ das folgende inhomogene LGS über $\mathbb{Q}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$$

Lösen Sie dieses LGS in Abhängigkeit von a und b!

Lösung.
Wir haben:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & a & b \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & b-3 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & b-3 \end{array}$$

Sei zunächst $a \neq 1$.
Dann erhalten wir:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-3}{a-1} \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 - \frac{b-3}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 2\frac{b-3}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-3}{a-1} \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 + \frac{b-3}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 2\frac{b-3}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-3}{a-1} \end{array}$$

Somit ist $\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} 1 + \frac{b-3}{a-1} \\ 2\frac{b-3}{a-1} \\ \frac{b-3}{a-1} \end{pmatrix}\}$.

$\underline{\text{Sei nun } a = 1}$

Wenn nun $\underline{b \neq 3}$, dann ist das System unlösbar, also $\mathbb{L} = \{\underline{0}\}$.

Sei also $\underline{b = 3}$. Dann erhalten wir:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Mit dem "Ablesetrick" ist also $\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

3 Punkte für bis zur ersten Fallunterscheidung. 1 Punkt pro Fallunterscheidung = (2 Punkte). 2 Punkte für die Rechnung für $a \neq 1$. 1 Punkt für die Rechnung für $a = 1, b \neq 3$, 2 Punkte für die Rechnung $a = 1, b = 3$.